| COLLEGE POLYVALENT BILINGUE « LES AIGLONS » Discipline-Unité-Travail | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Examen | Epreuve | Coef | Durée | Classe | Année Scolaire |
| | Mathématiques | 07 | 4H | TleC | 2020/2021 |

*présentation et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.*

## PARTIE A : Utilisation des ressources (15,5 points)

### Exercice 1 : 4.25pts

Soit $E$ un espace vectoriel rapporté à une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $\vec{a}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs de $E$tels que $\vec{a}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$ et $\vec{n}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$. A tout vecteur $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ de E, on associe l'application $f$ définie de $E$ dans E par : $f(\vec{u})=(\vec{a}\wedge\vec{u})\wedge\vec{n}$.

1. Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E$, puis montrer que la matrice de $f$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $M=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$. 1pt
2. Démontrer que $f$ est une projection vectorielle (c'est-à-dire $f\circ f=f$). 0,5pt
3. Démontrer que $\ker f$ est une droite vectorielle dont on donnera une base $\overrightarrow{e_1}$. 0,5pt
4. Démontrer que $Imf$ est un plan vectoriel de vecteur normal $\vec{n}$. On donnera une base $(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ de $Imf$. 0,75pt
5. Montrer que $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base de $E$. que peut-on dire de Ker$f$ et $Imf$ ? 0,75pt
6. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$. 0,5pt

### Exercice 2 : 3.5pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. $f$ est la transformation du plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases}x'=\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y\\y'=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y\end{cases}$.

1. Déterminer l'écriture complexe de $f$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f$. 0,75pt
2. Soit $(\Gamma)$ la courbe d'équation $7x^2+13y^2-6\sqrt{3}xy-64=0$.
   a) Déterminer une équation de $(\Gamma')$, image de $(\Gamma)$ par $f$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma')$. 1pt
   b) Justifier que $(\Gamma)$ est une ellipse dont on déterminera le centre et les sommets. 1pt

Construire $(\Gamma')$ et $(\Gamma)$ dans le même graphique. 0,75pt

### Exercice 3 : 3pts

I. On considère les intégrales : $I=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$.

1. Démontrer que : $I=-J$ et que $I=J+e^{\pi}+1$ (On pourra utiliser l'intégration par parties). 1pt
2. En déduire les valeurs exactes de $I$ et $J$. 0,5pt

II. $(u_n)$ est la suite définie par : $\begin{cases}u_0=e^3\\u_{n+1}=e\sqrt{u_n}\end{cases}$. On note $(v_n)$ la suite définie par :

$v_n=\ln u_n-2,\qquad \forall n\in\mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison $q$ et le premier terme $v_0$. 0,5pt
2. En déduire $v_n$, puis $\ln u_n$ en fonction de $n$. 0,5pt
3. **a.** Quelle est la limite de la suite $(v_n)$ ? 0,25pt

**b.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $e^2$. 0,25pt

## Exercice 4 : 4.75pts

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

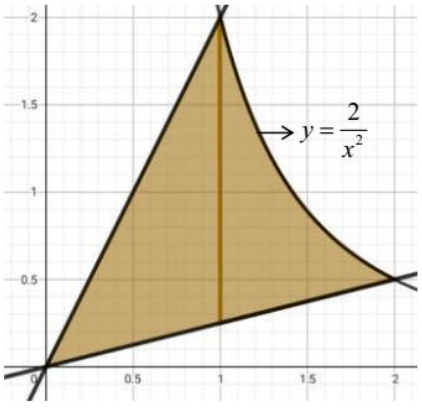
1. Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x-2} + ln|x-2|$.
   a. Etudier et dresser le tableau des variations de $f$. 1pt
   b. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de f suivant les valeurs de $x$. 0,75pt
   c. Quelle est l'image par $f$ de l'intervalle $]2; +\infty[$ ? 0,25pt
2. Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty; 2[$
   a. Montrer que $h$ est une bijection de l'intervalle $]-\infty; 2[$ vers un intervalle que l'on précisera. 0,25pt
   b. Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque$h^{-1}$ de h. 0,25pt
3. On définit la fonction numérique $g$ par : $g(x) = (x-1)\ln|x-2|$ de courbe $(\mathcal{C})$.
   a) Etudier les variations de $g$. 0,75pt
   b) Montrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts dont l'un est un point d'inflexion à $(\mathcal{C})$. 0,5pt
   c) Ecrire une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C})$ en ce point d'inflexion puis tracer $(T)$ et $(\mathcal{C})$. 1pt

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)

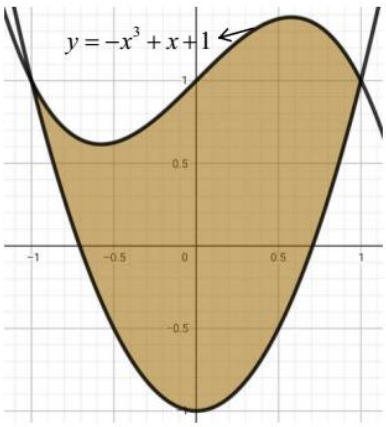
***Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel au calcul intégral et aux équation et aux systèmes linéaires pour résoudre des problèmes de vente de terrains.***

M. TENKEU, propriétaire terrien dispose de trois parcelles de terrain comme l'indique les figures ci-dessous. Pour acheter les billets d'avion de ses trois fils, Henri, James et Léo qui partent à l'étranger continuer leurs études universitaires, il souhaite vendre chaque parcelle à raison de 6000 FCFA le mètre carré. Les billets d'avion de Henri, James et Léo coûtent respectivement 700000FCFA, 1600000FCFA et 800000FCFA.

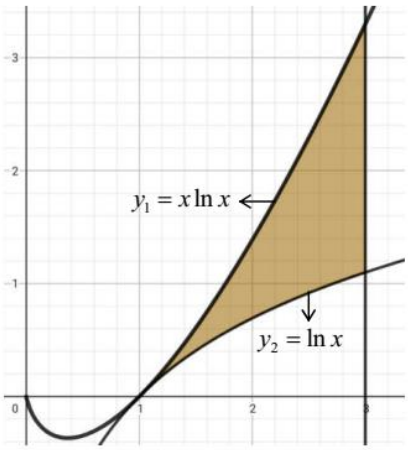
**Prendre :** une unité d'aire égal à $100\ m^2$; $\ln(3) \approx 1{,}1$



Parcelle 1



Parcelle 2



Parcelle 3

## Tâches :

1. Pourra-t-il acheter le billet d'avion de Henri en vendant de la parcelle 1 ? 1,5pt
2. Pourra-t-il acheter le billet d'avion de James en vendant de la parcelle 2 ? 1,5pt
3. Pourra-t-il acheter le billet d'avion Léo en vendant de la parcelle 3 ? 1,5pt