GROUPE CAUCHY - SCHWARZ
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
EFFORT-TRAVAIL-SUCCES
Email : nzouekeupatrice@yahoo.com

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS $N^{\underline{o}}5$
FONCTIONS EXPONENTIELLES
TERMINALES SCIENTIFIQUES

CONTACT WHATSAPP : 676764402

EXAMINATEUR : *Nzouekeu Mbitkeu Patrice*

ÉTUDE DES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice 1. *()*

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. *Étudier les variations de la fonction g.*
2. *Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.*
3. *En déduire que pour tout x de $[0;+\infty[$, $e^x - x > 0$.*

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.
On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1. *Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.*
2. *Soit (D) la droite d'équation $y = x$.*
   a. *Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$*
   b. *Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0;1]$.*
3. *Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$.*

Exercice 2. *()*

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

1. *Étudier le sens de variation de g.*
2. *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27;1,28]$; on note α cette solution.*
3. *Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0[$.*
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0;\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

PARTIE B

Dans cette partie il est question d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x+1} + 2$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

1. *Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpreter graphiquement ce résultat.*
2. a. *Déterminer la limite de f en $-\infty$.*
   b. *Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour C_f.*
   c. *Étudier la position de C_f par rapport à (d).*
3. a. *Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la **Partie A**.*
   b. *Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.*
   c. *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
4. *Tracer la courbe C_f dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.*

Exercice 3. *()*
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. *Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.*
2. *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.*
3. *Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.*
4. *Dresser le tableau de variations de f.*
5. *Déterminer l'équation cartésienne réduite de la tangente (T) à la courbe (C) au point A de la courbe d'abscisse 0.*
6. *Dans cette question, on étudie les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (T). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$*
   a. *Démontrer que pour tout réel x, on a : $\varphi'(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)^2$*
   b. *Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\varphi(0)$*
   c. *Conclure en ce qui concerne les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (T).*
7. *Tracer la tangente (T), la courbe (C), et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*
8. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. On note (C_g) la courbe représentative de g dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*
   a. *Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe (C_g) à partir de (C) ?*
   b. *Démontrer que g est impaire. Quelle pro(C_g) ?*
   c. *Quel rôle joue le point $A(0; \frac{1}{2})$ pour la courbe (C) ? Expliquer.*

Exercice 4. *()*
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction de la variable réelle x définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)(e^{-2x} + 1)$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unités 1cm sur les axes.

1. *Soit g, la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-2x} - 2x - 1$.*
   Étudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ la dérivée de f s'écrit $f'(x) = e^{-2x}g(x)$.*
3. *En déduire de 1) le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.*
4. a. *Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat.*
   b. *Montrer que la droite (d) : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f).*
   c. *Étudier les positions relatives de (d) et (C_f).*
   d. *Tracer (d) et (C_f) dans le repère.*
5. *On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$.*
   a. *Justifier que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]-\infty; 2[$.*
   b. *Dresser le tableau de variation de h^{-1}, puis tracer sa courbe dans le même repère que (C_f) (h^{-1} désigne la bijection réciproque de h).*

Exercice 5. *()*
Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :
$f(x) = xe^{1-x}$ *et* $g(x) = x^2e^{1-x}$
Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement notées (C) et (C').

1. ***Étude des fonctions f et g***
   (a) *Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$*
   (b) *Justifier le fait que les fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$. Pour cela, on démontrera d'abord que pour tout réel non nul x,*
   $$f(x) = e \times \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}$$
   et
   $$g(x) = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2}$$
   (c) *Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.*
2. ***Calcul d'intégrales***
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :
   $$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$
   (en particulier $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$).
   (a) *Calculer la valeur exacte de I_0.*

(b) *Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose $g_n(x) = x^n e^{1-x}$ (en particulier $g_0(x) = e^{1-x}$). Établir que pour tout réel x et tout entier naturel n,*

$$g'_{n+1}(x) = (n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x)$$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

(c) *En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.*

3. ***Calcul d'une aire plane***

   (a) *Étudier la position relative des courbes (C) et (C').*

   (b) *On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C) et (C'), d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. En exprimant $\mathcal{A}$ comme difference de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $\mathcal{A} = 3 - e$*

4. ***Étude de l'égalité de deux aires***
   Soit a un réel strictement supérieur a 1. On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C) et (C'), d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$. On admet que $S(a)$ s'exprime par : $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2+a+1)$. L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathcal{A}$ et $S(a)$ sont égales.

   (a) *Démontrer que l'équation $S(a) = \mathcal{A}$ est équivalente à l'équation : $e^a = a^2 + a + 1$*

   (b) *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.*

Exercice 6. *()*

Partie A

Soit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$. On considère la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = x + n(1 + e^x)$$

1. *Étudier les variations de g_n et dresser son tableau de variations.*
2. *Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$.*
3. (a) *Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $\ln x < x + 1$*

   (b) *En déduire que pour tout $n \geq 2$; $\alpha_n < \ln\left(\frac{1}{n}\right)$*

Partie B

On considère la fonction f_n *définie par*

$$f_n(x) = \frac{x^n e^x}{1+e^x}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

1. *Montrer que*

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

2. (a) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}e^x g_n(x)}{(1+e^x)^2}$$

et discuter suivant la parité de n *le signe de* $f_n'(x)$.

(b) *Dresser le tableau de variation de* f_n *dans le cas où* n *est pair et dans le cas où* n *est impair.*

3. *Déterminer les positions relatives de* (C_n) *et* (C_{n+1}).

4. *Montrer que l'équation*

$$f_n(x) = \frac{e}{e+2}$$

admet une unique solution u_n *dans* $[0;1]$.

5. (a) *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$;

$$f_{n+1}(u_n) \leq \frac{e}{e+2}$$

(b) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 2}$ *est croissante et convergente.*

6. *On désigne par* β *la limite de la suite* $(u_n)_{n\geq 2}$. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$;

$$f_{n+1}(u_n) \leq \frac{\beta^n e^\beta}{1+e^\beta}$$

7. *On suppose que* $0 \leq \beta < 1$. *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\beta^n e^\beta}{1+e^\beta}\right)$$

8. *Déterminer en justifiant votre réponse la valeur de* β

Exercice 7. *()*

Soit f *la fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$f(x) = x + e^{-x}$$

On note (C) *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

1. *Étudier les variations de la fonction* f *sur* $[0, +\infty[$.

2. *Déterminer la limite de* f *en* $+\infty$.

PARTIE B

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes positifs définie par : $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$$

1. *Démontrer que, pour tout réel positif,*
$$ln(1+x) \leq x$$
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par
$$g(x) = x - ln(1+x)$$
2. *En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,*
$$ln(n+1) \leq ln(n) + \frac{1}{n}$$
3. *Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,*
$$f(ln(n)) = ln(n) + \frac{1}{n}$$
4. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,*
$$ln(n) \leq u_n$$
5. *En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,*
$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$$
6. (a) *Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :*
$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$
   (b) *En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :*
$$u_n \leq 1 + ln(n-1)$$
7. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que*
$$ln(n) \leq u_n \leq 1 + ln(n-1)$$
Démontrer que la suite
$$\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$$
converge vers 1.

Exercice 8. *()*
L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. ***Étude des limites.***
   (a) *Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.*
   (b) *Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.*
   (c) *Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe (C) ?*
2. ***Étude des variations de la fonction f.***
   (a) *Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :*
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$
   (b) *Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.*
   (c) *Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.*
3. *Tracer la courbe (C) dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

Partie B *(Étude d'une suite d'intégrales)*

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx$$

1. *Calculer I_2.*
2. ***Une relation de récurrence***
   (a) *Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:*
   $$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$
   (b) *Calculer I_3.*
3. *Étude de la limite de la suite de terme général I_n*
   (a) *Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1;2]$, on a :*
   $$0 \leq \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$$
   (b) *En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).*

Exercice 9. *()*
On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de la fonction f.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.*
2. *Établir le tableau de variation de la fonction f.*
3. *Préciser les différentes asymptotes de la courbe (C_f) .*
4. *Tracer la courbe (C_f) .*

Exercice 10. *()*

Partie A

On considère la famille de fonctions (f_k) définie pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)e^x + x$$

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans une repère orthonormé. Quelle fonction de la famille (f_k) admet la droite (d) d'équation $y = x - e^{-2}$ comme tangente au point d'abscisse -2.

Partie B

1. *On considère la fonction g définie par :*

$$g(x) = (x + 1)e^x + e^{-2}$$

   (a) *Déterminer l'expression de la fonction g'.*
   (b) *Dresser le tableau de variation de la fonction g.*
2. *Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe (C_1) et de la droite (d).*

Exercice 11. *()*
n est un entier naturel non nul.On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$$

1. (a) *Soit φ la fonction définie sur $[0; 2]$ par*

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$$

Etudier les variations de φ sur $[0; 2]$. En déduire que pour tout réel t dans $[0; 2]$

$$\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$$

(b) *Montrer que pour tout réel t dans $[0;2]$ on a :*

$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$$

(c) *Par intégration , en déduire que :*

$$\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}}-1) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$$

(d) *On rappelle que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

Montrer que si (u_n) possède une limite L alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$

2. (a) *Vérifier que pour tout t dans $[0;2]$ on a*

$$\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$$

En déduire l'intégrale

$$I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$$

(b) *Montrer que pour tout t dans $[0;2]$, on a*

$$1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$$

En déduire que

$$I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}}I$$

(c) *Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.*

Exercice 12. *()*

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-e^{2x-2}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
On prendra 5cm comme unité sur les axes.

1. a. *Déterminer la limite de f en $-\infty$.*

   b. *Vérifier que pour tout réel x non nul on a : $f(x)=x[1-2e^{-2}\times(\frac{e^{2x}}{2x})]$*

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. *Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.*
3. *Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C).*
   Étudier la position relative de (C) et de (D).
4. *On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.*
   Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).

5. a. *On note I l'intervalle* $[0; 0,5]$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera α.

   b. *Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.*

6. *Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).*

Partie B

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$

1. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$.*
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.
2. *Dresser le tableau de variation de $g'(x)$ sur $I = [0; 0,5]$ puis en déduire que pour tout x de l'intervalle I, on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.*
3. *Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x) \in I$.*
4. *Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n,*

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|U_n - \alpha|$$

5. *Démontrer par récurrence que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n$*
6. *En déduire la limite de la suite U_n.*
7. *Déterminer un entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| \leq 10^{-5}$*