



Epreuve de Mathématiques

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [12, 75 points]

EXERCICE 1 : [3, 5 points]

E est le plan vectoriel dont une base est $B = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{u}) = (2x + 3y)\vec{i} + (-x - 2y)\vec{j}$ avec $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B . [0, 5pt]
2. Démontrer que si $\text{Ker} f = \{0_E\}$ alors est f injectif [0, 75pt]
3. Déterminer le noyau de f dans la base B . [0, 5pt]
4. f est-il injectif ? justifier votre réponse [0, 5pt]
5. Soient les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
 - a. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E . [0, 25pt]
 - b. Donner la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' . [1pt]

EXERCICE 2 : [4, 25 points]

- I. L'unité de longueur étant le centimètre, ABC est un triangle rectangle en A tels que $AB = AC = 2$ et $BC = 2\sqrt{2}$. On note I milieu du segment $[BC]$, J barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(I, 2)$ et (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 8$.

1. Montrer que pour tout point M du plan,
 $BM^2 + CM^2 = 2IM^2 + 4$ et $AM^2 + 2IM^2 = 3JM^2 + \frac{4}{3}$ [1pt]
2. En déduire que pour tout point M du plan, on a :
 $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3JM^2 + \frac{16}{3}$ [0, 5pt]
3. En déduire la nature et la construction de l'ensemble (Γ) . [0, 75pt]

- II. Une urne contient 6 jetons portant les numéros : 1 ; 2 ; 4 ; -1 ; -2 et -4. On tire deux jetons successivement avec remise dans cette urne. On désigne par a le numéro porté par le premier jeton et par b , celui porté par le deuxième jeton. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax^2 + bx + 20$ et on désigne par f l'endomorphisme du plan vectoriel E de base (\vec{i}, \vec{j}) dont la matrice dans cette base est $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ b & a \end{bmatrix}$.

Déterminer le nombre de couples $(a; b)$ pour lesquels :

1. La courbe de la fonction g admet au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses. [1pt]
2. f n'est pas un automorphisme de E . [1pt]

EXERCICE 3 : [5 points]

- I. Soit f fonction définie par : $f(x) = \frac{-x+2}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. [1pt]
2. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. [0, 75pt]
3. Tracer (C_f) [0, 5pt]

II.

1. Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n+2}{u_n} \end{cases}$$

Utiliser la courbe (C_f) pour construire les trois premiers termes de cette suite. [0, 75pt]

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-1}$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. [1pt]

b. Exprimer v_n en fonction de n . [0, 5pt]

c. Calculer $S = 2 \left(\frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{20}} \right)$. [0, 5pt]

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [7, 25 points]

Ze, Eboutou et Belinga sont tous propriétaire d'une société forestière, ils disposent chacun un grumier et doivent transporter des billes de bois avec leur grumier dans trois villes différentes.

▪ Le grumier de Ze doit faire un trajet de $100km$, avec une vitesse moyenne de x kilomètres par heure et une consommation en gas-oil de $6 + \frac{x^2}{100}$ litres par heures. Le prix du gas-oil est 600 francs CFA le litre, et le chauffeur Abdou de ce grumier est payé à 1800 francs CFA l'heure.

▪ Le grumier d'Eboutou doit faire un trajet de $200km$, avec une vitesse moyenne de x kilomètres par heure avec une consommation en gas-oil de $\frac{150}{x} + \frac{x}{4}$ litres pour $100km$. Le salaire horaire du chauffeur Oumarou est de 1500 FCFA et le litre de gasoil coûte 600 FCFA.

▪ Le grumier de Belinga doit faire un trajet de $225km$, avec une vitesse moyenne de x kilomètres par heure avec une consommation en gas-oil de $9 - \frac{x^2}{65}$ litres par heures. Le prix du gas-oil est 650 francs CFA le litre, et le chauffeur Ndiffor de ce grumier est payé à 2900 francs CFA le kilomètre par heure.

Ze, Eboutou et Belinga recommandent à leur chauffeur de rouler à une vitesse moyenne qui permettra à la société de minimiser le coût du trajet, c'est alors qu'Abdou, Oumarou et Ndiffor reçoivent de leur patron les montants respectifs. 37 000 FCFA, 26 000 FCFA et 58 000FCFA que chacun d'eux utilisera pour gérer le coût du trajet.

Tâches :

1. Le montant dont dispose Abdou lui permettra-il de gérer le coût du trajet ? [2, 25pts]
2. Le montant dont dispose Oumarou lui permettra-il de gérer le coût du trajet ? [2, 25pts]
3. Le montant dont dispose Ndiffor lui permettra-il de gérer le coût du trajet ? [2, 25pts]

Présentation : [0, 5pt]