L'épreuve comporte 2 parties obligatoires réparties sur 2 pages numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et la démarche vers le résultat seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [15 *Points*]

EXERCICE 1 : [4,5 *Points*]

A°) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1°) Montrer que f est dérivable sur IR et en déduire que, $\forall\, x \in IR, f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$. **0,5 pt**

2. a °) Etudier les variations de f. **0,5 pt**

b°) Montrer que f est une bijection de IR sur $]-1\,;\,1[$. **0,5 pt**

3. a °) Montrer que : $\forall\, x \in]-1\,;\,1[\,,\ f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) = x$. **0,5 pt**

b°) En déduire l'expression de f^{-1} et calculer pour tout $x \in IR$, $(f^{-1})'(x)$. **0,5 pt**

4°) Déterminer toutes les primitives F de f sur IR **0,5 pt**

B°) Un nombre entier naturel n s'écrit $2^{\alpha} \times 3^{\beta}$. Le nombre de diviseurs de $18\,n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1°) Montrer que, $18\,n = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta+2}$. **0,5 pt**

2°) Montrer alors que : $\alpha(\beta - 1) = 4$. **0,5 pt**

3°) En déduire les valeurs possibles pour n. **0,5 pt**

EXERCICE 2 : [5 *Points*]

A°) On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2}}$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1°) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.

Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de I. **0,75 pt**

2. a°) Sans calculer explicitement J et K, montrer que : $J + 2I = K$. **0,5 pt**

b°) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$. **0,5 pt**

c°) En déduire les valeurs exactes de J et K. **0,5 pt**

3°) Trouver une primitive sur $]1\,;\,+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$. **0,25 pt**

B°) Une suite $(I_n)_{n\in IN}$ est définie par $I_n = \frac{1}{n\,!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

1°) Calculer I_0. **0,25 pt**

2°) Par une intégration par partie, exprimer pour tout $n \in IN$, I_{n+1} en fonction de I_n . **0,75 pt**

3°) En déduire que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$ **0,75 pt**

4°) Montrer que $\forall\, n \in IN, 0 \le I_n \le \frac{e}{n\,!}$ et, en déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n$ **0,5 pt**

5°) Montrer que $e = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left(1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!}\right)$ **0,25 pt**

EXERCICE 3 : [2,5 *Points*]

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$, on considère les points suivants : $A(1\,;\,-2\,;\,3)$, $B(2\,;\,0\,;\,-3)$, $C(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $D(3\,;\,1\,;\,-2)$. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A\,;\,-1)$ et $(B\,;\,2)$ puis par H le barycentre des points pondérés $(C\,;\,3)$ et $(D\,;\,2)$.

1. a) Déterminer les coordonnées de chacun des points G et H. **0,5 pt**

b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant: $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\right) = \vec{0}$. **0,5 pt**

c) Le point $N(0\,;\,0\,;\,-1)$ appartient-il à (Δ) ? Justifier votre réponse. **0,5 pt**

2) Soit P le plan défini par la droite (GH) et le point $N(0\,;\,0\,;\,-1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de P. **0,5 pt**

b) Etudier la position relative de P et de la sphère S de centre C et de rayon $r = \frac{10\sqrt{286}}{143}$. **0,5 pt**

EXERCICE 4 : [3 $Points$]

Soit E un espace vectoriel sur IR dont une base est $\mathfrak{B} = (\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$; f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ associe le vecteur

$f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\,\vec{i} + (2x - y + z)\,\vec{j} + (x - 2y + 3z)\,\vec{k}$

1°) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$. **$0,5\,pt$**

2°) Déterminer le noyau $ker(f)$ de f et une base de $ker(f)$. **$0,5\,pt$**

3. a°) En déduire la dimension de l'image $Im(f)$ de f. **$0,25\,pt$**

b°) L'application f est-elle bijective ? Justifier votre réponse. **$0,5\,pt$**

4) On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \vec{j} + \vec{k}$; $\overrightarrow{e_2} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3} = \vec{i} + \vec{k}$.

a°) Démontrer que la famille $\mathfrak{B}' = (\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2}\,;\,\overrightarrow{e_3})$ est une base de l'espace vectoriel E. **$0,5\,pt$**

b°) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}'$. **$0,75\,pt$**

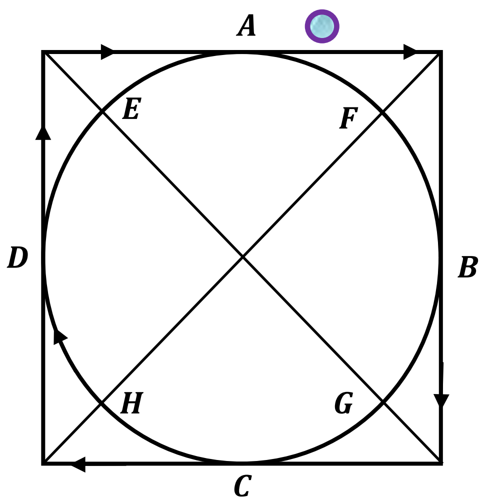
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [4,5 $Points$]

Paliers de Compétences :

Résoudre une situation problème, Déployer un raisonnement mathématique et Communiquer à l'aide du langage mathématique dans une situation de vie relatif au jeu du manège en faisant appel au théorème de Gauss, au théorème de Bézout et aux équations diophantiennes.

Situation problème :

Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma ci-contre. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle. Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un ballon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre à une vitesse constante et fait un tour en 24 secondes. La boule se déplace dans le même sens à une vitesse constante et fait un tour en 17 secondes. Pour gagner, Jean doit attraper le ballon et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin. À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le ballon part du point A.



Tâches :

1°) Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le ballon. On suppose qu'à un certain instant t, Jean attrape le ballon en A. À cet instant t, on note y le nombre de tours effectué par Jean depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectué par le ballon. Montrer que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $(E) : 17x - 24y = 9$. Après avoir vérifié que le couple $(9\,;\,6)$ est solution de (E), déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels solutions de l'équation (E). **$1,5\,pt$**

2°) Jean a payé le manège pour deux (02) minutes. Aura-t-il le temps d'attraper le ballon ?
Si Jean partait du point E, aurait-il le temps d'attraper le ballon en A avant les 2 minutes ? **$1,5\,pt$**

3°) Montrer qu'en fait, il n'est possible d'attraper le ballon qu'au point A.

Aide : On pourra montrer que si l'on attrape le ballon respectivement au point B, C et D, le couple $(x\,;\,y)$ doit vérifier respectivement les équations suivantes : $68x - 9 - y = 43$; $34x - 48y = 25$;
$68x - 96y = -39$. **$1,5\,pt$**

Présentation : **$0,5\,pt.$**

" ***Le succès se trouve au bout de l'effort*** "