

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 65 PTS

Exercice 1 : 20 points

- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, d'unité graphique $1cm$, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{V}$ d'affixe $v = -1 + \frac{5}{2}i$.
 - Trouver l'affixe z_Q du point Q image de B par la translation de vecteur $\vec{V}$. **1 pt**
 - Déterminer l'affixe z_R du point R , image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $k = -\frac{1}{3}$. **1,5 pt**
 - Déterminer l'affixe z_S du point S , image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. **1,5 pt**
 - Placer les points P, Q, R et S dans le repère. **1 pts**
 - Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme. **1,5 pt**
 - Calculer rapport $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et déduire la nature précise du quadrilatère $PQRS$. **3 pts**
 - Montrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera les éléments caractéristiques (centre et rayon). **2 pts**
- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ et on pose $U = \frac{1}{2}[(1-i) + \sqrt{3}(1+i)]$.
 - Résoudre l'équation (E) , écrire les solutions trouvées sous forme exponentielle. **4 pts**
 - Montrer que U^2 est une solution de (E) et déduire alors $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. **4,5 pts**

Exercice 2 : 12 points

On considère les intégrales suivantes : $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos^2 2x dx$ et $J = \frac{1}{3} \int_0^\pi e^{2x} \sin^2 2x dx$.

- Montrer qu'on a : $2I + 3J = \int_0^\pi e^{2x} dx$ et $2I - 3J = \int_0^\pi e^{2x} \cos 4x dx$. **2 pts**
- Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi e^{2x} dx$. **2 pts**
- En utilisant une intégration par partie calculer : $\int_0^\pi e^{2x} \cos 4x dx$. **3 pts**
- Déduire alors les valeurs des intégrales I et J . **5 pts**

Exercice 3 : 15 points

On considère les équations différentielles $(E) : y'' - 2y' + y = x^2 - 2$ et $(E') : y'' - 2y' + y = 0$ et la fonction polynôme $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et $c \in \mathbb{R}$).

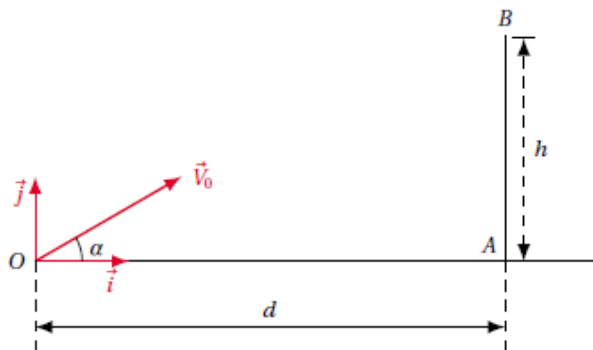
1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction polynôme φ soit solution de (E) . **4 pts**
2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E) ssi $g - \varphi$ est solution de (E') . **3 pts**
3. Résoudre (E') et déduire les solutions g de (E) . **5 pts**
4. En déduire la solution g de (E) dont la courbe admet au point $A(0, 5)$ une tangente parallèle à la droite $(D) : y = x + 1$. **3 pts**

Exercice 4 : 21 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x - e^{-\frac{x}{2}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit la droite $(D) : y = x + 1$

1. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition . **1,5 pt**
 (b) Montrer que (D) est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$; déduire la position de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) . **2 pt**
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f . **3 pts**
3. Tracer dans le repère (O, I, J) la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) (unité graphique $4cm$) . **4 pts**
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'aire , en unités d'aires , de la partie du plan limitée par la droite (D) , la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$.
 (a) Montrer que $A_n = 32(e^{-n/2} - e^{-(n+1)/2})$. **3 pts**
 (b) En déduire que la suite (A_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{e^{1/2}}$ et de premier terme A_1 que l'on déterminera . **5 pts**
 (c) Exprimer $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. **3 pts**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :15 PTS



ISSA et **IYA** sont deux joueurs de football élèves en classe de **Terminale D** . Ils se proposent d'étudier un **coup franc** direct en football et font les hypothèses suivantes :

1. Le ballon est un solide ponctuel .
2. L'influence de l'air est négligeable .
3. Le champ de pesanteur est uniforme et a une intensité de $g = 10N/kg$.

IYA pose le ballon en O sur le sol horizontale face au but **AB** de hauteur $h = 2,44m$ et à une distance $d = 25m$ de celui-ci . **ISSA** , tirant le **coup franc** , communique au ballon une vitesse initiale $\vec{V}_0$ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ incliné par rapport à l'horizontale d'un angle $\alpha = 30^\circ$. **Iya** se rappelle néanmoins que l'équation de la trajectoire du ballon est donnée par :

$$y = f(x) = -\frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x . \text{ La trajectoire du ballon est dans le plan } (O, \vec{i}, \vec{j}) .$$

Taches :

Tache 1 : **IYA** a-t-il raison par rapport l'équation de la trajectoire . **5 pts**

Tache 2 : Aider les deux amis à déterminer la hauteur maximal atteinte par le ballon **5 pts**

Tache 3 : y'aura-t-il but à l'issu du **coup franc** . **5 pts**