Ministère des Enseignements Secondaires — **Test 6 : 2020-2021**
Lycée de MOFOLE — **Classe : TC.**
Département de mathématiques — **Durée : 4h, Coefficient : 7**

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 113 PTS

Exercice 1 : 31 points

$ABCD$ est un carré direct du plan . I et K sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[CD]$. On se propose d'étudier la similitude directe $\mathbf{S}$ de centre Ω . on donne $\mathbf{S}(A) = I$ et $\mathbf{S}(C) = K$. On donne $AB = 4cm$.

1. Faire une figure et déterminer le rapport puis l'angle de $\mathbf{S}$. **5 pts**
2. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. **5 pts**
   (a) Déterminer les affixes des points A ,B ,D , C , I et K .
   (b) Déterminer l'écriture complexe de $\mathbf{S}$ et déterminer les coordonnées de Ω . **7 pts**
3. On suppose à présent que le point A a pour coordonnées $(12; 18)$, P est le point de coordonnées $(x; 0)$ et Q le point de coordonnées $(0; y)$ tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = -\dfrac{\pi}{2}$. On se propose ici de chercher les couples $(P; Q)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs . Soit $(E) : 2a + 3b = 78$ et $(x_0; y_0) \in \mathbb{N}^2$ solution de (E) . On pose $d = pgcd(x_0, y_0)$
   (a) Montrer que x et y vérifient l'équation diophantienne (E) . **4 pts**
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) et déterminer les valeurs possibles de d . **7 pts**
   (c) Déterminer les couples $(P; Q)$ tels que $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$. **3 pts**

Exercice 2 : 21 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(3; 0; 1)$, $B(1; -1; 0)$, $C(1; 2; -1)$ et $D(1; 0; 0)$. Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

1. Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan $(\mathbf{P})$ dont on donnera une équation cartésienne . **6 pts**
2. Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan $(\mathbf{P})$. **7 pts**
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S) . **3 pts**
4. Montrer que $(S) \cap (P)$ est un cercle dont on déterminera les caractéristiques. **5 pts**

Exercice 3 : 17 points

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x)e^x dx$

1. Calculer I_1 . et étudier les variations de la suite (I_n) . **6 pts**
2. Montrer en utilisant une intégration par partie que : $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$. **5 pts**
3. Calculer I_2 et I_3 et déduire alors la valeur de K . **6 pts**

Exercice 4 : 12 points

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel de fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable .

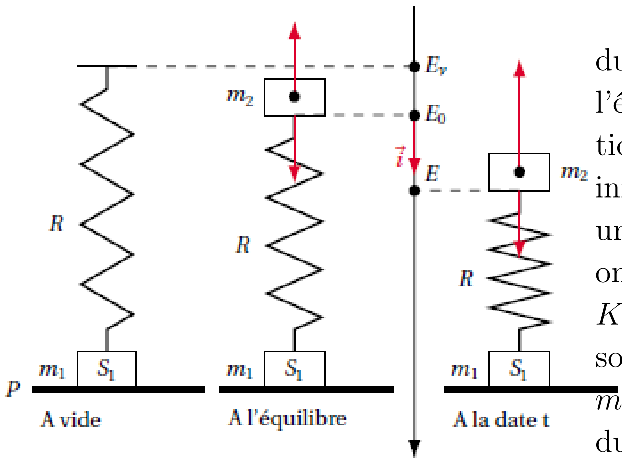
1. Montrer que $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui $f \longmapsto \varphi(f) = f'' - 2f' + f$ est un endomorphisme . **4 pts**
2. Resoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ et déduire $Ker(\varphi)$. **5 pts**
3. L'endomorphisme φ est - il un automorphisme . **3 pts**

Exercice 5 : 32 points

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}ln(1+e^{-2x})$ et $g(x) = ln(1+e^{-2x}) - \dfrac{1}{1+e^{2x}}$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et étudier les variations de g . **5 pts**
2. Étudier le signe de g . **3 pts**
3. (a) Montrer que $f'(x) = e^{2x} \times g(x)$ et déduire les variations de f . **5 pts**
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$. **2 pts**
   (c) Montrer que $f(x) = e^{2x}[-2x + ln(1 + e^{2x})]$ et déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$. **3 pts**
   (d) dresser le tableau de variation de f . **3 pts**
4. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant $5cm$ pour unité . Préciser la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$. **5 pts**
5. Montrer que $\dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$. **3 pts**
6. Calculer , à l'aide d'une intégration par parties l'aire (en cm^2) du domaine du plan limité par l'axe des abscisses , la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. **3 pts**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 27 PTS



Walva est un élève en classe de**TC** , à partir du dispositif donné ci-après il aimerait établir l'équation du mouvement donnant x en fonction du temps t , compte tenu des conditions initiales .Le solide S_1 de masse m_1 est posé sur un support horizontale P .Un ressort R dont on suppose la masse négligeable , de raideur K , assujetti à rester vertical , relie les deux solides S_1 et S_2 . Le solide S_2 a pour masse m_2 . Lorsqu'on pose le solide S_2 sur l'extrémité du ressort , celui-ci s'abaisse d'une longueur a (longueur mesuré à l'équilibre) .

.La position d'équilibre du solide S_2 sera prise comme origine des espaces . Un opérateur appui sur le solide S_2 de telle sorte que le ressort se trouve comprimé d'une longueur supplémentaire b ; le ressort est alors comprimé de $a + b$. À l'instant $t = 0$, l'opérateur lâche le système sans vitesse initiale ; on constate que le solide S_1 ne décolle pas et reste en contact permanent avec le support P .Pour étudier le mouvement de S_2 , on repère sa position par son abscisse x comptée sur un axe vertical orienté vers le bas , d'origine la position d'équilibre O de S_2 .

Taches (on donne : $m_2 = 100g$ **,** $g = 10m.s^{-2}$ **,** $a = 10cm$**) Aider Walva à montrer que :**

Tache 1 : La constance K du ressort est $K = 20N; m^{-1}$. **9 pts**

Tache 2 : L'équation différentielle satisfaite par x est : $x'' + \dfrac{K}{m_2}x = 0$ **9 pts**

Tache 3 : La loi horaire du mouvement est $x = b \times sin(10t + \pi/2)$. **9 pts**