# Terminale *D*-TI

*Cours de Mathématiques*

# COURS DE MATHEMATIQUES EN CLASSE DE TERMINALE D

**NZOUEKEU MBITKEU PATRICE**
**Professeur de Mathématiques et Informatique**

**31 mars 2006**

# Table des matières

# INTRODUCTION

Dans l'optique d'aider nos élèves,j'ai pensé préparer un cours de mathématiques en classe de Terminale $D$.Ce cours est conforme au programme camerounais de mathématiques.La classe de Terminale $D$ avant d'être une serie spécialisée dans la biologie est tout d'abord une série purement mathématiques.J'invite donc tous les apprenants et distingués lecteurs à se mettre au travail.

# Raisonnement par récurrence

Pour démontrer que $1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ est vrai pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1,on ne peut utiliser que le raisonnement par récurrence.Ce dernier sert donc à démontrer qu'un énoncé mathématique dans lequel figure une lettre $n$ est vrai pour tout entier naturel supérieur ou égal à un entier naturel fixé $n_0$.

## 1.1 Théorème de la récurrence

$n_0$ est un entier naturel fixé et $P(n)$ un énoncé mathématique.Si $P(n_0)$ est vrai et si $P(n)$ étant vrai,implique $P(n+1)$ vrai alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$,$P(n)$ est vrai.

## 1.2 Principe du raisonnement par récurrence

$n_0$ est un entier naturel fixé et $P(n)$ un énoncé mathématique.Pour démontrer que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

1. On vérifie que $P(n_0)$ est vrai
2. On suppose vrai $P(n)$
3. On se sert de la supposition pour démontrer que $P(n+1)$ est vrai

## 1.3 Exemples

### 1.3.1 Exemple 1

Notons $P(n) \Leftrightarrow 1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.
Ici, $n_0 = 1$ car 1 est le plus petit entier naturel concerné.Montrons que $P(n)$ est vrai pour $n \geq 1$.

1. $P(1) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}(1)(1+1)$
   $\Leftrightarrow 1 = 1$
   $P(1)$ est vrai
2. supposons vrai $P(n) \Leftrightarrow 1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$
3. Utilisons la supposition pour montrer que $P(n+1)$ est vrai.
   C'est-à-dire $1+2+3...+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)$
   D'où $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$
   $= (n+1)(1+\frac{1}{2}n)$
   $= (n+1)(\frac{n+2}{2})$
   $= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$
   $= \frac{1}{2}(n+1)[(n+1)+1]$ D'où $P(n)$ est vrai

### 1.3.2 Exemple 2

Démontrons par récurrence que le nombre $10^n - 1$ est multiple de 9.
Posons $P(n) \Leftrightarrow 10^n - 1$ est multiple de 9

1. Vérification pour $n = 0$.
   $P(0) \Leftrightarrow 10^0 - 1$ est multiple de 9 D'où 0 est multiple de 9
2. supposons vrai $P(n) \Leftrightarrow 10^n - 1$ est multiple de 9
   C'est-à-dire que $10^n - 1 = 9k$
3. Utilisons la supposition pour montrer que $P(n{+}1)$ est vrai. $P(n{+}1) \Leftrightarrow 10^{n+1} - 1$ est multiple de 9
   $10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1$
   $= 10(9k + 1) - 1$
   $= 90k + 10 - 1$
   $= 90k + 9$
   $= 9(10k + 1)$
   $= 9k'$ avec $k' = 10k + 1$

### 1.3.3 Exercice 1

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$,
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### 1.3.4 Exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, le nombre $3^{2n} - 2^n$ est multiple de 7.

### 1.3.5 Solutions

(a) Exercice 1
Posons $P(n) \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
-Vérification pour $n = 1$
$P(1) \Leftrightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$ d'où $P(1)$ est vrai
- Supposons vrai $P(n) \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Montrons que $P(n + 1)$ est vrai c'est -à-dire
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n + 1)^2$
$= (n + 1)[\frac{n(2n+1)}{6} + (n + 1)]$
$= (n + 1)(\frac{2n^2+n+6n+6}{6})$
$= (n + 1)(\frac{2n^2+7n+6}{6})$
Factorisons $2n^2 + 7n + 6$
$2n^2 + 7n + 6 = 2(n^2 + \frac{7n}{2} + 3)$
$= 2[(n + \frac{7}{4})^2 - \frac{49}{16} + 3]$
$= 2[(n + \frac{7}{4})^2 - \frac{1}{16}]$
$= 2[(n + \frac{7}{4}) - \frac{1}{4}][(n + \frac{7}{4}) + \frac{1}{4}]$
$= 2[n + \frac{6}{4}][n + \frac{8}{4}]$
$= 2(n + \frac{3}{2})(n + 2)$
$= (2n + 3)(n + 2)$ d'où
$(n + 1)(\frac{2n^2+7n+6}{6}) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$
$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$

(b) Exercice 2
- Vérification pour $n = 0$
$P(0) \Leftrightarrow 3^{2(0)} - 2^{(0)}$ est un multiple de 7
0 est un multiple de 7 vrai.
- Supposons vrai $P(n) \Leftrightarrow 3^{2n} - 2^{n}$ est un multiple de 7.
$3^{2n} - 2^{n}$ est un multiple de 7 $\Leftrightarrow 3^{2n} - 2^{n} = 7k \qquad (k \in N)$
$3^{2n} = 7k + 2^{n}$.
- Utilisons la supposition pour montrer que $P(n+1)$ est vrai.
$P(n+1) \Leftrightarrow 3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)}$ est un multiple de 7.
$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^{2} - 2^{n} \times 2$
$= 3^{2n} \times 9 - 2^{n} \times 2$
$= 9(7k + 2^{n}) - 2^{n} \times 2$
$= 63k + 2^{n} \times 9 - 2^{n} \times 2$
$= 63k + 2^{n}(9 - 2)$
$= 63k + 2^{n}(7)$
$= 7(9k + 2^{n})$
$= 7Z \quad$ avec $Z = 9k + 2^{n}$

# Suites Numériques

## 2.1 Rappels

Une suite numérique est une fonction pour laquelle l'ensemble de départ $E$ est une partie de $\mathbb{N}$.

## 2.2 Monotonie

Une suite monotone est une suite croissante ,décroissante ou constante.$(U_n)$ $n \in E$ est une suite numérique.
- $(U_n)$ est croissante $\Leftrightarrow \forall n \in E, U_n \leq U_{n+1}$
- $(U_n)$ est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in E, U_n \geq U_{n+1}$
- $(U_n)$ est strictement croissante $\Leftrightarrow \forall n \in E, U_n < U_{n+1}$
- $(U_n)$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in E, U_n > U_{n+1}$
- $(U_n)$ est constante $\Leftrightarrow \forall n \in E, U_n = U_{n+1}$
- $(U_n)$ est stationnaire $\Leftrightarrow U_n$ est constante à partir d'un certain rang.

Pour étudier la monotonie de $(U_n)$,on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
- Calculer $U_{n+1} - U_n$ et étudier son signe
- Comparer à 1 le nombre $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ (pour $U_n > 0$)
- Utiliser le sens de variation de la fonction $f$ si on a $U_n = f(n)$
- Se servir de la courbe de $f$ et de la droite d'équation $y = x$ pour representer les termes sur l'un des axes et conjecturer pour $U_{n+1} = f(U_n)$

**Exemple**

Donner le sens de variation de $(U_n)$ dans chacun des cas suivants :

1. $U_n = 3 - 2n$
2. $U_n = \frac{n+1}{n+2}$
3. $U_n = \frac{3}{2^n}$
4. $\begin{cases} U_0 = & 1 \\ U_{n+1} = & \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

**Solutions**

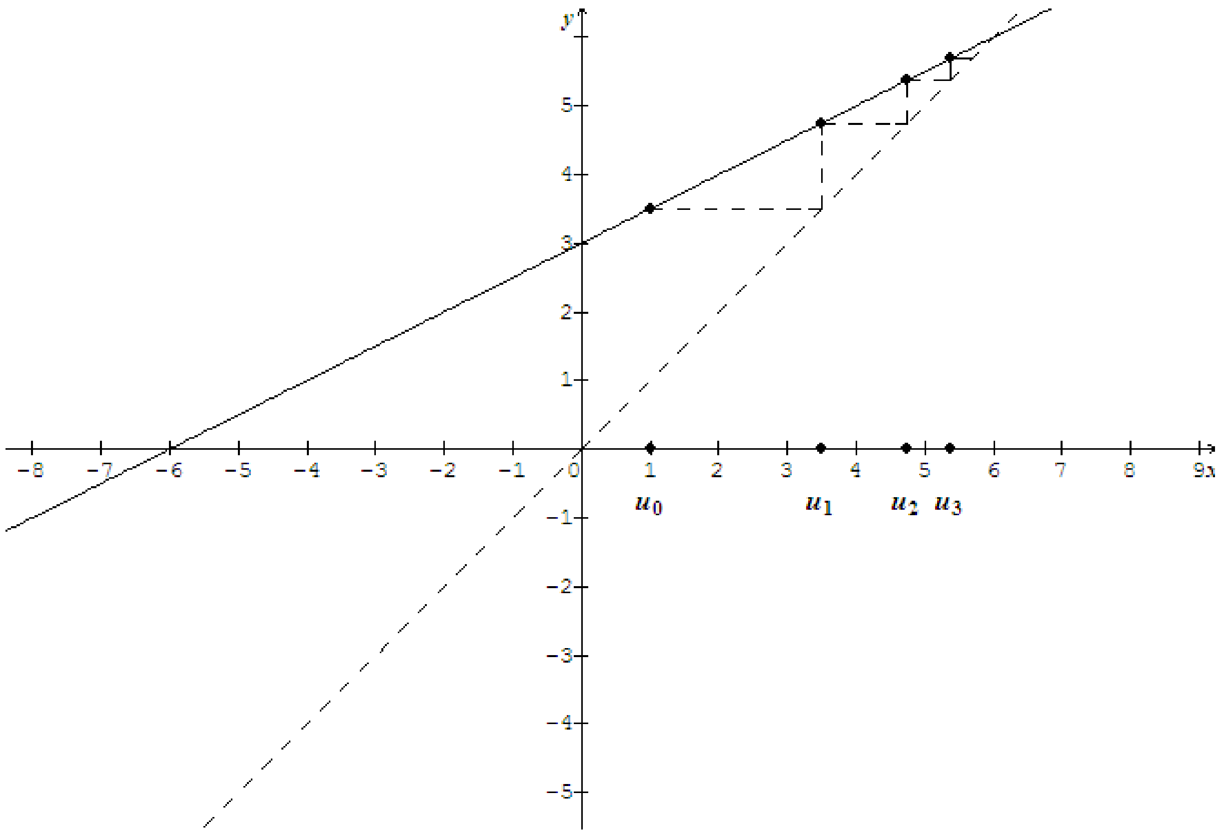
1. $U_n = 3 - 2n$
   $\Rightarrow U_{n+1} = 3 - 2(n+1)$
   $\Rightarrow U_{n+1} - U_n = 3 - 2(n+1) - (3 - 2n)$
   $= 3 - 2n - 2 - 3 + 2n$

$= -2 < 0$
$U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$
$\Rightarrow U_n > U_{n+1}$
$(U_n)$ est strictement décroissante.

2. $U_n = \frac{n+1}{n+2}$
$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$
$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$
$= \frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$
$= \frac{n^2+4n+4-(n^2+4n+3)}{(n+3)(n+2)}$
$= \frac{n^2+4n+4-n^2-4n-3}{n^2+5n+6}$
$= \frac{1}{n^2+5n+6} > 0$
$U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow U_n < U_{n+1}$
$(U_n)$ est strictement croissante.

3. $U_n = \frac{3}{2^n}$
$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{3}{2^{n+1}}$
$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^n}$
$= \frac{3}{2^n \times 2} - \frac{3}{2^n}$
$= \frac{3-6}{2^n \times 2}$
$= \frac{-3}{2^{n+1}} < 0$
$U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow U_n > U_{n+1}$
$(U_n)$ est strictement décroissante.

4. $\begin{cases} U_0 = & 1 \\ U_{n+1} = & \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$
Soient les droites d'équations $(d) : y = x$ et $(d') : y = \frac{1}{2}x + 3$



## 2.3 Suite Majorée,Minorée,Bornée

$(U_n)_{n\in E}$ est une suite numérique.$M \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.
$(U_n)$ est majorée par $M \Leftrightarrow \forall n \in E, U_n < M$
$(U_n)$ est minorée par $m \Leftrightarrow \forall n \in E, U_n > m$
$(U_n)$ est bornée par $M$ et $m \Leftrightarrow \forall n \in E, m < U_n < M$

### 2.3.1 Exemple 1

$U_n = \cos n$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq U_n \leq 1$
$(U_n)$ est bornée par $-1$ et $1$

### 2.3.2 Exemple 2

$U_n = \frac{1}{1+n^2}$ et $V_n = n^2 + 2n + 5$,montrons que :

1. $(U_n)$ est majorée par 1
2. $(V_n)$ est minorée par 5

**Solution**

1. $U_n - 1 = \frac{1}{1+n^2} - 1$
   $= \frac{-n^2}{1+n^2}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-n^2}{1+n^2} \leq 0 \Rightarrow U_n - 1 \leq 0 \Rightarrow U_n \leq 1$ D'où $(U_n)$ est majorée par 1
2. $V_n - 5 = n^2 + 2n + 5 - 5$
   $= n^2 + 2n \geq 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2n \geq 0$
   $\Rightarrow V_n - 5 \geq 0$
   $\Rightarrow V_n \geq 5$ D'où $(V_n)$ est minorée par 5

**Retenons**
Pour montrer que $(U_n)$ est minorée par $m$,on étudie le signe de $U_n - m$.
Pour montrer que $(U_n)$ est majorée par $M$,on étudie le signe de $U_n - M$.
On peut encore utiliser la récurrence.

## 2.4 Suites convergentes

Soit $(U_n)$ une suite numérique telle que $U_n = f(n)$.
Si

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

et $l \in \mathbb{R}$ alors $f$ est convergente et converge vers $l$.
Si

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

alors $(U_n)$ diverge vers $+\infty$
Si

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

alors $(U_n)$ diverge vers $-\infty$
**Application**
Etudions la convergence de $(U_n)$ dans chacun des cas suivants :

1. $U_n = \frac{4n+1}{n+3}$
2. $U_n = n^2 + 3n - 5$

**Solution**

1. $$\lim_{n \to +\infty} U_n = 4$$
   d'où $(U_n)$ converge vers 4.

2. $$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$
   d'où $(U_n)$ diverge vers $+\infty$.

Pour une suite non définie par une formule explicite,l'étude de la convergence peut utiliser l'une des techniques suivantes :

$P_1$) -Toute suite croissante et majorée est convergente.
-Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$

$P_2$) -Toute suite décroissante et minorée est convergente.
-Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

$P_3$) $(U_n)$ et $(V_n)$ étant deux suites telles que $U_n < V_n$ à partir d'un certain rang, si
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$
alors
$$\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$$
si
$$\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$$
alors
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$$

$P_4$) Si $(U_n)$, $(V_n)$ et $(W_n)$ sont des suites telles que $U_n \leq V_n \leq W_n$ et
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = l$$
alors
$$\lim_{n \to +\infty} V_n = l$$

$P_5$) Si $(U_n)$ et $(V_n)$ sont des suites pour lesquelles $|U_n - l| \leq V_n$ et
$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$$
$l \in \mathbb{R}$ alors on a
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$
**Applications**
$U_n = -n + \cos n$, étudions la convergence de $(U_n)$

**Solution**
$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -n-1 \leq -n+\cos n \leq -n+1$

$$\lim_{n\to+\infty}(-n-1) = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-n+1) = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-n-1) = \lim_{n\to+\infty}(-n+1) = -\infty$$

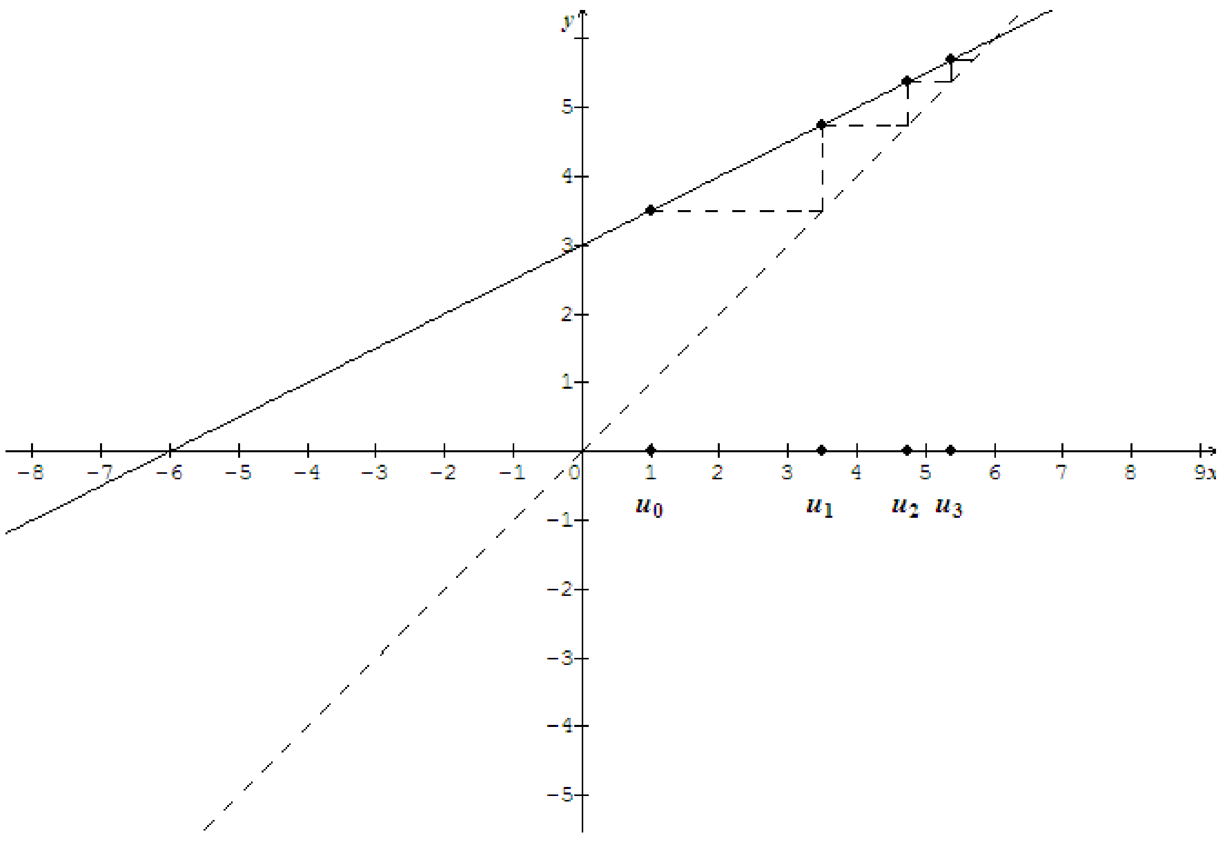
et $-n-1 \leq U_n \leq -n+1$
d'où

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

$(U_n)$ diverge vers $-\infty$.

$P_6$) Si $U_{n+1} = f(U_n)$, si $(U_n)$ converge vers $l$ et si $f$ est continue en $l$ alors $l$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

**Exemple**
$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$
$f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 = x$
$\Rightarrow \frac{1}{2}x - x = -3$
$\Rightarrow \frac{-1}{2}x = -3$
$\Rightarrow \frac{1}{2}x = 3$
$\Rightarrow x = 6$
$(U_n)$ converge vers 6



## 2.5 Suite arithmétique et suite géométrique

Ce sont deux suites particulières pour lesquelles les résultats à ne pas oublier sont les suivants :

| | Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|---|
| Premier terme | $U_0$ | $U_0$ |
| Raison | $r$ | $q$ |
| Formule de recurrence | $U_{n+1} = U_n + r$ | $U_{n+1} = qU_n$ |
| Formule explicite | $U_n = U_0 + nr$ ou $U_n = U_p + (n-p)r$ si $U_p$ est le premier terme | $U_n = U_0q^n$ ou $U_n = U_pq^{n-p}$ |
| Somme des $n$ premiers termes $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1}$ | $S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$ | $S = U_0(\frac{1-q^n}{1-q})$ |

**Rappel**

Pour montrer qu'une suite $(U_n)$ est arithmétique, on peut :
- Calculer $U_{n+1} - U_n$ et vérifier qu'il est indépendant de $n$
- Examiner si on a $U_{n+1} = U_n + r$
- Examiner si on a $U_n = U_0 + nr$

Pour montrer qu'une suite $(U_n)$ est géometrique on peut :
- Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et vérifier qu'il est indépendant de $n$
- Examiner si on a $U_{n+1} = qU_n$
- Examiner si on a $U_n = U_0q^n$

**Exemple**

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n+2} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(V_n)$ telle que $V_n = \frac{1}{U_n}$ est une suite arithmétique
2. Exprimer $(U_n)$ et $(V_n)$ en fonction de $n$
3. $V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de $n$
4. Etudier la convergence de $(U_n)$

**Solution**

1. $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n+2} \end{cases}$ $\quad V_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} \quad V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{V_{n+1}}$

   $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{2(\frac{1}{V_n})}{(\frac{1}{V_n})+2} = \frac{(\frac{2}{V_n})}{\frac{1+2V_n}{V_n}} = \frac{2}{1+2V_n} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1+2V_n}{2} = V_n + \frac{1}{2} \quad r = \frac{1}{2} \quad V_0 = 1$
2. $V_n = 1 + \frac{1}{2}n \quad U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}n}$
3. $V_0 + V_1 + ... + V_n = \frac{(n+1)(2+\frac{1}{2}n)}{2}$

## 2.6 Utilisation des suites dans la résolution des problèmes

La résolution de certains problèmes de notre environnement peut utiliser les suites.Dans ce cas il y'a trois étapes de travail.
- La modélisation du problème qui consiste à rechercher la suite qui convient à la résolution du problème.
- La résolution mathématique
- L'interprétation des résultats

**Exemple**

Le loyer mensuel d'une maison est de 50.000 fca.Le loyer augmente de 6 pour cent chaque année.

1. Quel est le montant de ce loyer après 8 ans
2. Au bout de combien d'année le loyer aura-t-il doublé
3. Calculer la somme des loyers payés au bout des 10 premières années

### Solution

1. Modélisation du problème
   Posons $u_0 = 50000$
   $u_1 = u_0 + \frac{6}{100}u_0 = u_0(1+\frac{6}{100}) = 1,06u_0$
   Après deux ans $u_2 = u_1 + \frac{6}{100}u_1 = u_1(1+\frac{6}{100}) = 1,06u_1 = (1,06)^2u_0$
   Après $n$ années, $u_n = (1,06)^n u_0$
   Après 8 ans le montant du loyer est $u_8 = (1,06)^8 u_0 = (1,06)^8.50000 = 79692,4$
2. Nombre d'année $n$
   $(1,06)^n.50000 = 100000$
   $(1,06)^n = 2$
   $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,06} = 12$
3. $S = 12u_0 + 12u_1 + 12u_2 + 12u_3 + 12u_4 + 12u_5 + 12u_6 + 12u_7 + 12u_8 + 12u_9$
   $= 12[50000(\frac{1-(1,06)^{10}}{1-(1,06)})]$
   $= 7908476,9\ fcfa$

**Exercice 1**
$x$,$y$ et $z$ sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.Calculer ces trois nombres sachant que leurs sommes est 9 et la somme de leurs carrés est 59.
**Exercice 2**
$x$,$y$ et $z$ sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante.Calculer ces trois nombres sachant que leurs sommes est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$.
**Solution 1**
Soit $r$ la raison , posons $y = r + x$ et $z = r + y$ par substitution on obtient $z = 2r + x$.On a le système $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=59 \end{cases}$
Remplaçons $y$ et $z$ par leurs valeurs.On obtient $\begin{cases} x+r+x+2r+x=9 \\ x^2+(r+x)^2+(2r+x)^2=59 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3r=9 \\ 3x^2+5r^2+6rx=59 \end{cases}$
$\Rightarrow x = 3 - r$ , remplaçons $x$ par sa valeur dans la seconde équation.On obtient $3(3-r)^2 + 5r^2 + 6r(3-r) = 59$
$\Rightarrow 3(9-6r+r^2) + 5r^2 + 18r - 6r^2 = 59$
$\Rightarrow 27 - 18r + 3r^2 + 5r^2 + 18r - 6r^2 = 59$
$\Rightarrow 2r^2 + 27 = 59$
$\Rightarrow 2r^2 = 32$
$\Rightarrow r^2 = 16$
$\Rightarrow r = 4\ ou\ r = -4$
$pour\ r = 4, x = 3 - 4 = -1\ et\ on\ obtient\ x = -1, y = 3, z = 7$
$pour\ r = -4, x = 3 + 4 = 7\ et\ on\ obtient\ x = 7, y = 3, z = -1$
**Solution 2**
$q$ étant la raison, $x = x$ , $y = qx$ , $z = q^2x$ et on obtient le système $\begin{cases} x+y+z=63 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{16} \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x(1+q+q^2)=63 \\ \frac{1}{x}(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2})=\frac{7}{16} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{x}(\frac{1+q+q^2}{q^2}) = \frac{7}{16}$ remplaçons $1+q+q^2$ par sa valeur. $x(1+q+q^2) = 63 \Rightarrow 1+q+q^2 = \frac{63}{x}$ d'où $\frac{1}{x}(\frac{1+q+q^2}{q^2}) \Rightarrow \frac{1}{x}(\frac{\frac{63}{x}}{q^2}) = \frac{7}{16}$
$\Rightarrow \frac{1008}{x} = 7xq^2 \Rightarrow x^2q^2 = 144 \Rightarrow qx = \pm 12$
$qx = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{q}$. Remplaçons $x$ par sa valeur dans la première équation du système.On obtient : $\frac{12}{q}(1+q+q^2) = 63 \Rightarrow \frac{12}{q} + 12 + 12q = 63 \Rightarrow 12q^2 + 12 - 51q = 0$.On obtient deux solutions $q_1 = \frac{1}{4}$

et $q_2 = 4$.Comme la suite est croissante, $q = 4$ et $x = 3$, $y = 12$, $z = 48$.
Pour $qx = -12$ pas de solution.

# Nombres Complexes

## 3.1 Ensemble des nombres complexes

Une équation de la forme $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.Il existe un nombre imaginaire noté $i$ qui vérifit $i^2 = -1$ qui permet de résoudre l'équation.On a $x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = i \; ou \; x = -i$. $i$ est l'élément de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ qui contient tout les éléments de $\mathbb{R}$ et des éléments de la forme $a + bi$ ou $a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
On a alors : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

## 3.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

C'est l'écriture $a + bi$ ou $a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

**Exemple**

$2 - 4i$ , $5 + i\sqrt{2}$ , $5$ , $6i$

## 3.3 Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe

$z = a + ib$ a : Partie réelle b : Partie imaginaire
On note : $\Re_e(z) = a$ et $\Im_m(z) = b$

**Exemple**

$z = 7 - 2i$ $\Re_e(z) = 7$ $\Im_m(z) = -2$

**Propriétés**

$z \in \mathbb{C}$ , $z' \in \mathbb{C}$

1. $z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} \Re_e(z') = \Re_e(z) \\ \Im_m(z') = \Im_m(z) \end{cases}$
2. $z = 0 \Leftrightarrow \Re_e(z) = 0 \; et \; \Im_m(z) = 0$

## 3.4 Nombres imaginaires purs

Ce sont des nombres complexes de la forme $ai$ ou $ia$ ($a \in \mathbb{R}$)

**Exemple**

$6i$ , $i\sqrt{3}$

($z$ imaginaire pur)$\Leftrightarrow \begin{cases} \Re_e(z) = 0 \\ \Im_m(z) \neq 0 \end{cases}$

($z$ est un nombre réel)$\Leftrightarrow \Im_m(z) = 0$

L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}^*$

## 3.5 Calcul dans $\mathbb{C}$

### 3.5.1 Egalité de deux nombres complexes

$z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.On a $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \text{a} \\ b' = \text{b} \end{cases}$

**Application**

$z = 5 - 3i$ et $z' = 5 + (4 + x)i$.Calculons $x$ tel que $z' = z$

$z' = z \Leftrightarrow 4 + x = -3$

$\Rightarrow x = -7$

### 3.5.2 Addition de deux nombres complexes

$z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

$z' + z = a' + b'i + a + bi = a' + a + i(b' + b)$

$\Re_e(z + z') = \Re_e(z) + \Re_e(z')$ et $\Im_m(z + z') = \Im_m(z) + \Im_m(z')$

**Exemple**

$z = -4 + 2i$ et $z' = 7 - 11i$

$z' + z = 7 - 11i + (-4 + 2i) = 7 - 4 + i(2 - 11) = 3 - 9i$

### 3.5.3 Produit de deux nombres complexes

#### 3.5.3.1 Puissances entières du nombre $i$

On a $i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$\forall k \in \mathbb{N}, i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

**Exemple**

$i^{2007} = i^{4\times 501+3}$

$= (i^4)^{501} \times i^3$

$= 1 \times -i = -i$. On divise 2007 par 4

Calculer $i^{3600}$ , $i^{543}$ , $i^{260}$

Dans toute opération où cela est necessaire , $i^2$ est remplacé par -1 ou bien -1 est remplacé par $i^2$.

#### 3.5.3.2 Produit de deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2$

$= aa' + i(ab' + a'b) - bb'$

$\boxed{zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)}$

**Exemple**

$z = 1 - 2i$ et $z' = -3 + i$

$zz' = (1 - 2i)(-3 + i) = -3 + i + 6i + 2 = -1 + 7i$

## 3.6 Conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$ tel que :

- $\Re_e(\overline{z}) = \Re_e(z)$
- $\Im_m(\overline{z}) = -\Im_m(z)$

**Exemple**
$z = -1 - 3i \quad \overline{z} = -1 + 3i$
**Remarques**

1. $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = z$
2. $z \in i\mathbb{R}^* \Rightarrow \overline{z} = -z$

**Propriétés**
$z \in \mathbb{C}$ , $z' \in \mathbb{C}$

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
4. $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{(\overline{z})}{(\overline{z'})} \quad (z' \neq 0)$
5. $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{(\overline{z})} \quad (z' \neq 0)$
6. $z = a + bi \quad \overline{z} = a - bi \quad z\overline{z} = a^2 + b^2$

La propriété 6 est utilisée pour rendre réel un dénominateur qui ne l'est pas.
**Exemple**
Ecrivons sous forme algébrique le nombre complexe $z = \frac{1+3i}{2-5i}$
$z = \frac{1+3i}{2-5i} = \frac{(1+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+5i+6i-15}{4+25} = \frac{-13}{29} + \frac{11i}{29}$

## 3.7 Module d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est le nombre réel positif $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
**Exemple**
$z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
**Propriétés**
$z \in \mathbb{C}$ , $z' \in \mathbb{C}$

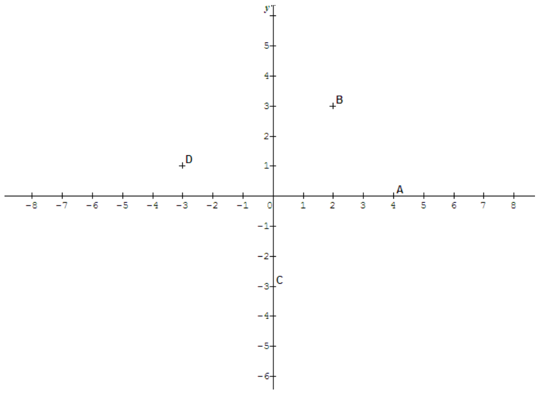
1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|zz'| = |z| \times |z'|$
3. $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$
4. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
5. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$

**Application**
$z = 3 - 4i \qquad z' = 1 + i\sqrt{3} \qquad zz' = (3 - 4i)(1 + i\sqrt{3})$
$|zz'| = |3 - 4i| \times |1 + i\sqrt{3}| = 5 \times 2 = 10$

## 3.8 Réprésentation géométrique d'un nombre complexe $z = a + bi$

$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé.
$z = a + bi$ est représenté par le point $M(a, b)$.
$M(a, b)$ est le point image de $z = a + bi$.
$z = a + bi$ est l'affixe du point $M$.
$\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de $z$.

$z_{\overrightarrow{OM}}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le plan s'appelle plan complexe.
**Application**
Plaçer dans le plan les points $A$,$B$,$C$,$D$ d'affixes respectifs
$4$, $2+3i$, $-3i$, $-3+i$.
**Remarque**

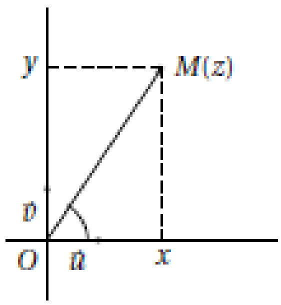



$r_1)$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 3i - 4 = -2 + 3i$

$r_2)$ $|z_{\overrightarrow{AB}}| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}$

## 3.9 Argument d'un nombre complexe $z = a + bi$

$(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé, $M$ le point image de $z$.
$mes(\widehat{\overrightarrow{oi}, \overrightarrow{oM}}) = \Theta = \ argument\ de\ z$




**Exemple**

| Nombre | $z_1 = 3$ | $z_2 = 2i$ | $z_3 = -2$ | $z_4 = -2i$ |
|---|---|---|---|---|
| Argument | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ |

Si $\Theta$ est un argument de $z$, alors $\Theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ en est un autre. Un nombre complexe a une infinité d'arguments. L'argument principal est élément de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

## 3.10 Forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est l'écriture $z = |z|(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ où $\Theta$ est un argument de $z$.
**Exemple**
$z = 1 + i$
$|z| = \sqrt{2}$
$arg(z) = \frac{\pi}{4}$
$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
On a $z = a + bi$
$\boxed{z = |z|\cos\Theta + i|z|\sin\Theta}$. Par identification, $|z|\cos\Theta = a$ et $|z|\sin\Theta = b$ d'où
$\boxed{\cos\Theta = \frac{a}{|z|}}$ et $\boxed{\sin\Theta = \frac{b}{|z|}}$
**Application**
$z = 1 + i\sqrt{3}$ Trouvons la forme trigonométrique de $z$

$|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\Theta = \ argument \ de \ z \Rightarrow \begin{cases} \cos\Theta = & \frac{1}{2} \\ \sin\Theta = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{3}$

## 3.11 Propriétés des modules et des arguments

$z \in \mathbb{C}$ , $z' \in \mathbb{C}$

1. $z' = z \Leftrightarrow |z'| = |z| \ et \ arg(z') = arg(z) + 2k\pi$
2. $|zz'| = |z| \times |z'| \ et \ arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
3. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
4. $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$
5. $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = n \times arg(z)$

## 3.12 Forme exponentielle d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est l'écriture $z = re^{i\Theta}$ dans laquelle $r = |z|$ et $\Theta = arg(z)$

**Exemple**

| Forme algébrique | \|z\| | arg(z) | Forme exponentielle |
|---|---|---|---|
| $z = 1 + i\sqrt{3}$ | 2 | $\frac{\pi}{3}$ | $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ |
| $z = 1 + i$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ |
| $-6 + 6i\sqrt{3}$ | 12 | $\frac{2\pi}{3}$ | $z = 12e^{i\frac{2\pi}{3}}$ |

## 3.13 Formule de MOIVRE

C'est l'écriture $\boxed{(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n = \cos n\Theta + i\sin n\Theta}$ ,$\forall n \in \mathbb{N}$ ,$\forall\Theta \in \mathbb{R}$

**Application**

Calculons $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2007}$

$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2007} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{2007}$

$= \cos\frac{2007\pi}{3} + i\sin\frac{2007\pi}{3}$

$= \cos 669\pi + i\sin 669\pi$

$= \cos(668\pi + \pi) + i\sin(668\pi + \pi)$

$= \cos\pi + i\sin\pi$

$= -1 + i(0) = -1$

Calculons $(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^{741}$ $(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^{741} = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{741}$

$= \cos\frac{741\pi}{4} + i\sin\frac{741\pi}{4}$

$= \cos(\frac{740\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{740\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 3.14 Formules d'EULER

Ce sont les écritures $\boxed{\cos\Theta = \frac{e^{i\Theta}+e^{-i\Theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\Theta = \frac{e^{i\Theta}-e^{-i\Theta}}{2i}}$ obtenues de la manière suivante :

On pose $\begin{cases} e^{i\Theta} = & \cos\Theta + i\sin\Theta \\ e^{-i\Theta} = & \cos\Theta - i\sin\Theta \end{cases} \Rightarrow e^{i\Theta} + e^{-i\Theta} = 2\cos\Theta \ \ et \ \ e^{i\Theta} - e^{-i\Theta} = 2i\sin\Theta$ et on déduit les formules d'EULER.

Ces formules servent à la linéarisation des polynômes trigonométriques.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $,\forall \Theta \in \mathbb{R},$ $\boxed{\cos n\Theta = \frac{e^{in\Theta}+e^{-in\Theta}}{2}}$ $\boxed{\sin n\Theta = \frac{e^{in\Theta}-e^{-in\Theta}}{2i}}$

## 3.15 Linéarisation

Linéariser l'écriture $\cos^n x$ , $(n \in \mathbb{N})$ c'est l'exprimer en fonction de $\cos px$ et $\cos qx$ où $(p \in \mathbb{Z})$ et $(q \in \mathbb{Z})$.
Linéariser l'écriture $\sin^n x$ , $(n \in \mathbb{N})$ c'est l'exprimer en fonction de $\cos px$ et $\sin qx$. La linéarisation peut utiliser les formules d'EULER.

**Exemple**

linéarisons $\cos^5 x$.

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^5 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^5$

$= \frac{1}{2^5}(e^{ix} + e^{-ix})^5$

$= \frac{1}{32}(e^{i5x} + 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix})$

$= \frac{1}{32}[e^{i5x} + e^{-5ix} + 5e^{ix}e^{-ix}(e^{i3x} + e^{-3ix}) + 10e^{2ix}e^{-2ix}(e^{ix} + e^{-ix})]$

$= \frac{1}{32}[2\cos 5x + 5(2\cos 3x) + 10(2\cos x)]$

$= \frac{1}{32}[2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x]$

$= \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$

$\boxed{\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x}$

Dans certains cas les formules trigonométriques peuvent permettre d'éviter les formules d'EULER.

**Exemple**

linéarisons $\cos^4 x$.

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{2\cos 2x}{4} + \frac{\cos^2 2x}{4}$

$\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\frac{1+\cos 4x}{2})$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$

$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

## 3.16 Equations dans $\mathbb{C}$

### 3.16.1 Racine n-ième d'un nombre complexe $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$

C'est un nombre complexe $u = \varphi(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ qui vérifie $u^n = z$

Soit $[\varphi(\cos\Theta + i\sin\Theta)]^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\Rightarrow \varphi^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi^n = & r \\ n\Theta = & \alpha + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = & \sqrt[n]{r} \\ \Theta = & \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ...., n-1\}$

Un nombre complexe admet $n$ racines $n$-ième de même module.

**Exemple**

Déterminer les racine 4-ième de $z = 1 + i\sqrt{3}$

$|z| = 2$

$\Theta = arg(z) \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{3}$

$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$u = \varphi(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ est racine 4-ième de $z$ si et seulement si :

$u^4 = z \Leftrightarrow \varphi^4(\cos 4\Theta + i\sin 4\Theta) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^4 = & 2 \\ 4\Theta = & \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = & \sqrt[4]{2} \\ \Theta = & \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \end{cases}$

| $k$ | $\Theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{\pi}{12}$ |
| 1 | $\frac{7\pi}{12}$ |
| 2 | $\frac{13\pi}{12}$ |
| 3 | $\frac{19\pi}{12}$ |

$u_0 = [\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{12}]$ $u_1 = [\sqrt[4]{2}, \frac{7\pi}{12}]$ $u_2 = [\sqrt[4]{2}, \frac{13\pi}{12}]$ $u_3 = [\sqrt[4]{2}, \frac{19\pi}{12}]$

### 3.16.2 Racine Carrée d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est un nombre complexe $u = x + iy$ qui vérifie : $\begin{cases} u^2 = & z \\ |u|^2 = & |z| \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = & a+bi \\ r^2 = & \sqrt{a^2+b^2} = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2xyi = & a+bi \\ |u|^2 = & |z| \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = & a \quad (E_1) \\ x^2+y^2 = & \varphi \quad (E_2) \\ 2xy = & b \quad (E_3) \end{cases}$ avec $\varphi = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

On détermine $u$ en résolvant le système ci-haut.

$(E_1) + (E_2) \Rightarrow 2x^2 = a + \varphi$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{a+\varphi}{2}}$ *ou* $x = -\sqrt{\frac{a+\varphi}{2}}$

$(E_2) - (E_1) \Rightarrow 2y^2 = \varphi - a$

$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{\varphi-a}{2}}$ *ou* $y = -\sqrt{\frac{\varphi-a}{2}}$

Pour $b < 0$, $x$ et $y$ sont de signes contraires.

$u_1 = \sqrt{\frac{a+\varphi}{2}} - i\sqrt{\frac{\varphi-a}{2}}$

$u_2 = -\sqrt{\frac{a+\varphi}{2}} + i\sqrt{\frac{\varphi-a}{2}}$

Pour $b > 0$, $x$ et $y$ ont le même signe.

$u_1 = \sqrt{\frac{a+\varphi}{2}} + i\sqrt{\frac{\varphi-a}{2}}$

$u_2 = -\sqrt{\frac{a+\varphi}{2}} - i\sqrt{\frac{\varphi-a}{2}}$

**Exemple**

$z = -5 + 12i$

$z = -5 + 12i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = 13$

$(u = x + iy$ est racine carrée de $z) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = & z \\ |u|^2 = & |z| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2xyi = & -5+12i \\ |u|^2 = & 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = & -5 \quad (E_1) \\ x^2+y^2 = & 13 \quad (E_2) \\ 2xy = & 12 \quad (E_3) \end{cases}$ Après résolution on trouve $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$. Comme $xy = 6$, $x$ et $y$ sont de même signe et on a $u_1 = 2 + 3i$, $u_2 = -2 - 3i$.

### 3.16.3 Equation du $2^e$ degré $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$

Pour la résoudre, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

✓ Si $\Delta = 0$ alors $z = \frac{-b}{2a}$

✓ Si $\Delta \neq 0$ alors $z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

**Exemple**

$(E_1) : 3z^2 - z + 2 = 0$ $\quad (E_2) : z^2 - (2i-1)z - (1+i) = 0$

$(E_1) : 3z^2 - z + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 = 23i^2 = (i\sqrt{23})^2$

$z_1 = \frac{1-i\sqrt{23}}{6}$ $\quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{23}}{6}$ $\quad S = \{\frac{1-i\sqrt{23}}{6}; \frac{1+i\sqrt{23}}{6}\}$
$(E_2) : z^2 - (2i-1)z - (1+i) = 0$
$\Delta = (-(2i-1))^2 + 4(1)(1+i) = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$
$\Rightarrow z_1 = i \quad z_2 = -1+i \quad S = \{i; -1+i\}$

# Nombres complexes et géométrie

## 4.1 Nombres complexes et configuration du plan

### 4.1.1 Vecteur et nombres complexes

Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ :
$\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
✓ Son affixe $z_B - z_A = z_{\overrightarrow{AB}}$
✓ Sa norme $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$
✓ L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$ qui vérifie $mes(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) = arg(z_{\overrightarrow{AB}})$
**Exemple**
$z_A = 1 - 2i \qquad z_B = -4 + 12i$
$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -4 + 12i - (1 - 2i) = -4 + 12i - 1 + 2i = -5 + 14i$
$\overrightarrow{AB}$ a pour norme $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{(-5)^2 + (14)^2} = \sqrt{221}$
$mes(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) = arg(z_{\overrightarrow{AB}})$

### 4.1.2 Angles orienté de deux vecteurs et nombres complexes

Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ , $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = arg(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}) = arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) + 2k\pi$
**Application**
$z_A = i \;\; z_B = 3i \;\; z_C = 1 \;\; z_D = 5$
$mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = arg(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}) = arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) = arg(\frac{5-1}{3i-i}) = arg(\frac{4}{2i}) = arg(\frac{4i}{-2}) = arg(-2i) = \frac{-\pi}{2}$

### 4.1.3 Egalité de deux vecteurs et nombres complexes

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$
**Application**
$z_A = 2 + i$ , $z_B = 6 + 3i$ , $z_C = 1 + 2i$ , $z_D = 5 + 4i$
Démontrons que $ABCD$ est un parallèlogramme.
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 6 + 3i - 2 - i = 4 + 2i \qquad z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = 5 + 4i - 1 - 2i = 4 + 2i$
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}} = 4 + 2i$

### 4.1.4 Egalité de deux distances et nombres complexes

$AB = CD \Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_{\overrightarrow{CD}}|$
$z_A = 2 + i$ , $z_B = 6 + 3i$ , $z_C = 1 + 2i$ , $z_D = 5 + 4i$
$|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_{\overrightarrow{CD}}| = |4 + 2i| = \sqrt{20}$

### 4.1.5 Alignement de trois points $A$,$B$,$C$ et nombres complexes

(A , B , et C sont alignés)$\Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R}^*$

**Application**

$z_A = 1 + i$ , $z_B = -3 - 3i$ , $z_C = 7 + 7i$

Montrons que les points A,B,C sont alignés

$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{7+7i-1-i}{-3-3i-1-i} = \frac{6+6i}{-4-4i} = \frac{6(1+i)}{-4(1+i)} = \frac{-3}{2} \in \mathbb{R}^*$

Comme $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R}^*$ alors $A$ , $B$ , $C$ sont alignés.

### 4.1.6 Orthogonalité de deux droites

$A$ , $B$ , $C$ , $D$ sont des nombres complexes : $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in i\mathbb{R}^*$

**Exemple**

$z_A = 1 + i$ , $z_B = 6 + 6i$ , $z_C = 1 + 4i$ , $z_D = 4 + i$

Montrons que $(AB) \perp (CD)$

On vérifie facilement que $\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-3}{5} i \in i\mathbb{R}^*$

**Conclusion**

$(AB) \perp (CD)$

## 4.2 Nombres complexes et transformation du plan

### 4.2.1 Bijection plane , bijection complexe associée , notation complexe

A toute transformation plane :

$$F: \quad \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M(z) \mapsto M'(z')$$

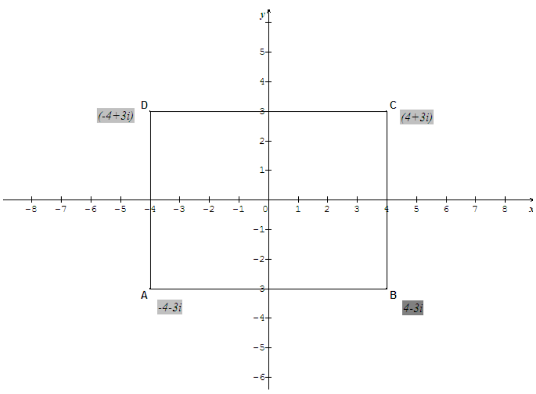
est associée une transformation complexe

$$f: \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z' = f(z)$$

L'écriture $z' = f(z)$ est la notation complexe de $F$.

### 4.2.2 Transformations élémentaires

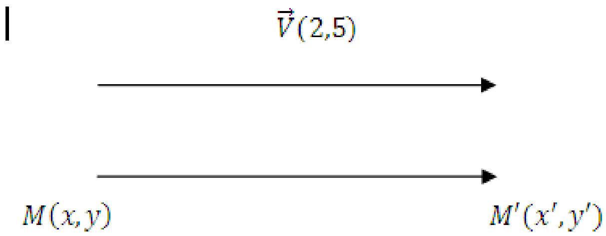
#### 4.2.2.1 Symétries.




1. La symétrie par rapport à l'axe $(OI)$ a pour écriture complexe $z' = \overline{z}$
2. La symétrie par rapport à l'axe $(OJ)$ a pour écriture complexe $z' = -\overline{z}$

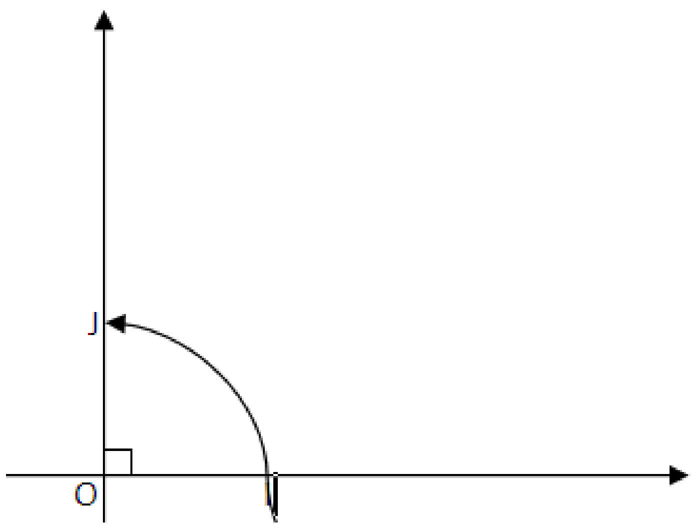
3. La symétrie par rapport au point $O$ a pour écriture complexe $z' = -z$

#### 4.2.2.2 Translation.




Soit le vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(2,5)$ et les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$.
$M' = t_{\overrightarrow{V}(M)} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = & 2 \\ y' - y = & 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = & x + 2 \\ y' = & y + 5 \end{cases}$
$x' + iy' = x + iy + 2 + 5i \Rightarrow z' = z + b$ avec $b = 2 + 5i$ ; $\overrightarrow{V}$ est un vecteur d'affixe $b \in C$.
La translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour écriture complexe $z' = z + b$.

#### 4.2.2.3 Rotation de centre O




$R(O, \frac{\pi}{2})$ est la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. $J = R(I)$ et $z_J = e^{i\frac{\pi}{2}} z_I$ car $i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \times 1$.
Une rotation de centre $O$ et d'angle de mesure $\Theta$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\Theta} z$.

#### 4.2.2.4 Homothétie de centre O

Toute homothétie de centre $O$ et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a pour écriture complexe $z' = \alpha z$.

### 4.2.3 Transformations usuelles du plan

#### 4.2.3.1 Rotation de centre quelconque $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'angle $\widehat{\theta}$ de mesure $\theta$.

La rotation a pour bijection complexe associée

$f : \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto z' = f(z) = e^{i\theta}z + b$
avec $f(\omega) = \omega$.
**Exemple**
$\Omega$ a pour affixe $2+i$. $\widehat{\theta}$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$. La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + b$ avec $2 + i = e^{i\frac{\pi}{6}}(2+i) + b$. Après résolution de l'équation, nous trouvons $b = \frac{5-2\sqrt{3}}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et on déduis que
$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{5-2\sqrt{3}}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})z + \frac{5-2\sqrt{3}}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

#### 4.2.3.2 Homothétie de centre quelconque $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Elle a pour bijection complexe associée
$f: \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto z' = f(z) = \alpha z + b$
avec $f(\omega) = \omega$ , $b \in \mathbb{C}$. L'écriture complexe est $z' = \alpha z + b$.
**Exemple**
Donnons l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $4 - i$ et de rapport $-2$.
**Solution**
$\begin{cases} z' = & -2z + b \\ 4 - i = & -2(4-i) + b \end{cases}$ $b \in \mathbb{C}$. Après résolution, on trouve $b = 12 - 3i$ d'où $z' = -2z + 12 - 3i$

#### 4.2.3.3 Composé $F \circ G$ de deux transformations et bijection complexe associé.

Si $F$ est associée à la bijection complexe $f$, $G$ associée à la bijection complexe $g$ alors $F \circ G$ est associée à la bijection complexe $f \circ g$.
**Exemple**
$f$ est l'homothétie d'écriture complexe $z' = -2z + 2 - i$ et $g$ est la rotation d'écriture complexe $z' = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + 3i$
Trouvons l'écriture complexe de $f \circ g$ :
$f(z) = -2z + 2 - i$
$g(z) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + 3i$
$f \circ g(z) = f(g(z)) = -2g(z) + 2 - i = -2((\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + 3i) + 2 - i = (-1 - \sqrt{3}i)z + 2 - 7i$
$(f \circ g)(z) = (-1 - \sqrt{3}i)z + 2 - 7i$

## 4.3 Similitude directe du plan.

### 4.3.1 Définition

Une similitude de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est une transformation du plan pour laquelle deux points $M$ et $N$ ayant pour images respectives $M'$ et $N'$ vérifient
$M'N' = \alpha MN$.
**Exemple**
Une rotation, une homothétie , une symétrie centrale , la composée d'une homothétie ou d'une isométrie sont des similitudes.
Une similitude directe est celle qui concerve l'orientation des angles. Une similitude indirecte est celle qui change l'orientation des angles. Le programme concerne les similitudes directes.
**Propriétés**
A toutes similitudes planes directes est associée une transformation complexe $f$ définie par $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.
Réciproquement, à toute transformation complexe $f$ définie par $f(z) = az + b$ est associée une similitude.

### 4.3.2 Caractéristiques géométriques d'une similitude $S$ définie par $f(z) = az + b$

✓ Le centre $\Omega$ donc l'affixe $\omega$ vérifie $f(\omega) = \omega$ et $\omega = \frac{b}{1-a}$
✓ Le rapport $\alpha = |a|$
✓ Son angle $\theta = arg(a)$
On note : $S(\Omega, \alpha, \theta)$

### 4.3.3 Interprétation d'une écriture complexe du type $z' = az + b$

| $z' = az + b$ | | |
|---|---|---|
| **Valeur de a** | **Nature de l'application** | **Caractéristiques géométriques** |
| $a = 1$ | Translation | Vecteur d'affixe $b$ |
| $a = -1$ | Symétrie centrale | Centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{2}$ |
| $a \in R^* \setminus \{-1, 1\}$ | Homothétie | Centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport $a$ |
| $a = \alpha + \beta i$ avec $\|a\| = 1$ | Rotation | Centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = arg(a)$ |
| $a = \alpha + \beta i$ avec $\|a\| \neq 1$ | Similitude | Centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ de rapport $\alpha = \|a\|$ et d'angle $\theta = arg(a)$ |

**Application**
Donner la nature et les caractéristiques géométriques de l'application associée à $z' = az + b$

| $z' = az + b$ | **Nature** | **Caractéristique** |
|---|---|---|
| $z' = z + 5 - 6i$ | Translation | Vecteur d'affixe $b = 5 - 6i$ ou $\overrightarrow{V}(5, -6)$ |
| $z' = -4z + 12i$ | Homothétie | $\omega = \frac{12i}{5}$ , $a = -4$ |
| $z' = iz + 6 - i$ | Rotation | $\omega = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$ , $\theta = \frac{\pi}{2}$ |
| $z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})z + i$ | Rotation | $\omega = \frac{1+i(2-\sqrt{3})}{4-2\sqrt{3}}$ , $\theta = arg(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})$ |
| $z' = 2iz - 4 - 8i$ | Similitude | $\omega = \frac{-4-8i}{1-2i}$ , $\|a\| = 2$ , $\theta = arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ |

**Exercice**
Soit $h$ l'application du plan dans lui même qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

1. Déterminer l'affixe du point $\Omega$ telle que $h(\Omega) = \Omega$
2. En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de $h$
3. $r$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle 15°. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S = h \circ r$

**Solution**
$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

1. Affixe du point $\Omega$ telle que $h(\Omega) = \Omega$.
   $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+2i}{2-\sqrt{2}}$. D'où $z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{2i}{2-\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + i(2 + \sqrt{2})$
2. Nature exacte et les éléments caractéristiques de $h$
   $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$
   $h$ est une homothétie de rapport $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre $\Omega \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$
3. $r(\Omega, 15°)$ , nature et les éléments caractéristiques de $S = h \circ r$
   $S$ est une similitude de rapport $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , d'angle $15° = \frac{\pi}{12}$ , de centre
   $\Omega \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et on note $S(a = \frac{\sqrt{2}}{2}, 15° = \frac{\pi}{12}, \Omega(\sqrt{2}+1, 2+\sqrt{2}))$

**Annexe**

Les propriétés sont données dans le tableau ci-dessous :

| **Configuration** | **Caractérisation** | **Caractérisation complexe** |
|---|---|---|
| $(AB) \perp (CD)$ | $mes\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ | $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ |
| $(AB) \parallel (CD)$ | $mes\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right) = k\pi$ | $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ |
| $A$, $B$ et $C$ alignés | $Mes\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) = 0 + k\pi$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ |

ée de Nkolnda-Nsimalen 10 Romaric Tchapnga ( **PLEG**)

| | | |
|---|---|---|
| $ABC$ est isocèle en $A$ | $AB = AC$ et $Mes\widehat{A} = \alpha$ . $0 < \alpha < \pi$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ |
| $ABC$ est équilatéral | $AB = AC = BC$ et $Mes\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| $ABC$ rectangle en $A$ | $mes\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ |
| $A$, $B$, $C$ et $D$ cocycliques | $mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = mes\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)[\pi]$ | $arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg\left(\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right)[\pi]$ |

# Systèmes linéaires

## 5.1 Système de 3 équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

C'est une écriture pouvant se mettre sous la forme : $\left\{\begin{array}{rr} ax+by+cz= & d \\ a'x+b'y+c'z= & d' \\ a''x+b''y+c''z= & d'' \end{array}\right.$ où $(x,y,z)$ est l'inconnue. La résolution peut utiliser :

1. La méthode de substitution
2. La méthode de combinaison
3. La méthode de comparaison
4. La méthode du pivot de Gauss

**Exemple**

Résolvons dans $\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants : $(S_1)$ $\left\{\begin{array}{rr} 4x-3y+z= & 8 \\ -2x+y-2z= & -9 \\ x+y+z= & 6 \end{array}\right.$

$S=\{(2,1,3)\}$

$(S_2)$ $\left\{\begin{array}{rr} -x+2y-z= & -4 \\ 3x-y+2z= & 6 \\ 2x+2y-3z= & -3 \end{array}\right.$ $S=\{(1,-1,1)\}$

## 5.2 Système de 2 équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

C'est une écriture pouvant se mettre sous la forme : $\left\{\begin{array}{rr} ax+by+cz= & d \\ a'x+b'y+c'z= & d' \end{array}\right.$ où $(x,y,z)$ est l'inconnue. La résolution considère l'une des inconnues comme paramètre.

**Exemple**

$(S_1)$ $\left\{\begin{array}{rr} -5x+y-3z= & 6 \\ 2x-3y+4z= & -2 \end{array}\right.$ $S=\{(\frac{-16-5z}{13},\frac{-2+14z}{13},z)\}$

$(S_2)$ $\left\{\begin{array}{rr} x+y+z= & 8 \\ -3x+4y-5z= & -6 \end{array}\right.$ $S=\{(\frac{38-9z}{7},\frac{18+2z}{7},z)\}$

$(S_3)$ $\left\{\begin{array}{rr} \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2} & \\ 2x-3y+z= & 16000 \end{array}\right.$ $S=\{(-12000,-16000,-8000)\}$

## 5.3 Problème conduisant à un système de 3 équations.

C'est un problème dont la mise en équation donne un système de 3 équations.

**Exemple**

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que la somme des chiffres est égale à 15. Quand on permute le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 350.Quand on permute le chiffre des dizaines et celui des unités , le nombre augmente de 18.

**Exemple**

Le nombre est $xyz$

On a

$$x + y + z = 15 \tag{5.1}$$

Après permutation de $x$ et $y$ , on a le nombre $yxz$. il vient

$100y + 10x + z = 100x + 10y + z + 350$ d'où après réduction on obtient :

$$9y - 9x = 45 \tag{5.2}$$

Après permutation de $y$ et $z$ , on a le nombre $xzy$. il vient

$100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 18$ d'où après réduction on obtient :

$$-9y + 9z = 18 \tag{5.3}$$

On trouve $S = \{(1, 6, 8)\}$. Le nombre est 168 , après la première permutation on a 618 et après la seconde on a 186.

**Exercice**

Une coopérative décide d'acheter trois terrains. Les terrains 1 , 2 et 3 coûtent respectivement 942000 , 2374000 et 1004000. Les membres de la coopérative sont répartis en trois groupes $A$,$B$ et $C$. Le tableau ci-dessous indique ce que chaque membre de chaque groupe a payé pour ces trois achats :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Terrain 1 | 9000 | 12000 | 21000 |
| Terrain 2 | 12000 | 35000 | 80000 |
| Terrain 3 | 7000 | 13000 | 31000 |

Quel est le nombre de membres de cette coopérative ?

CHAPITRE SIX

# LIMITES ET CONTINUITÉ

## 6.1 Limites

### 6.1.1 Limites de référence

$a \in \mathbb{R}$ , $b \in \mathbb{R}$ , $c \in \mathbb{R}$

**Propriétés**

1. $\lim_{x\to a} b = b$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} b = b$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty} b = b$

   **Exemple**

   $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 8 \end{array}$ $\quad$ $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$ , $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 8$ , $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 8$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ ainsi $\lim_{x\to 0} x^5 = 0$

3. $\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{Si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{Si } n \text{ est impair} \end{cases}$

   ainsi $\lim_{x\to -\infty} x^8 = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} x^7 = -\infty$

4. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

   ainsi $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

   ainsi $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

   ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} \times \frac{5x}{3x}$

   $= 1 \times 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

   preuve de la propriété 6

   $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ avec $f(x) = \sin x$ $\quad$ $f'(x) = \cos x$

   $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos 0 = 1$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

   Preuve

   $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$ d'ou $\frac{1-\cos x}{x^2} \approx \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \approx \frac{1}{2}$

### 6.1.2 Limites en l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles

**Propriétés**

1. (a) $\lim_{x\to +\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .......... + a_1 x^1 + a_0) = \lim_{x\to +\infty}(a_n x^n)$

   (b) $\lim_{x\to -\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .......... + a_1 x^1 + a_0) = \lim_{x\to -\infty}(a_n x^n)$

La limite d'une fonction polynômes quand $x \to +\infty$ ou quand $x \to -\infty$ est égale à celle de son terme de plus haut degré.
Ainsi $\lim_{x\to-\infty}(-2x^5 + 3x^4 + 2x - 3) = \lim_{x\to-\infty}(-2x^5) = +\infty$

2. (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_1x^1+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+.........+b_1x^1+b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_px^p}$

   (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_1x^1+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+.........+b_1x^1+b_0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n}{b_px^p}$

   La limite d'une fonction rationnelle quand $x \to +\infty$ ou quand $x \to -\infty$ est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré du numerateur et du denominateur.
   Ainsi $\lim_{x\to-\infty}(\frac{3x^2-7x+4}{5x^3+x-2}) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{3x^2}{5x^3}) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{3}{5x}) = 0$

### 6.1.3 Limites à gauche et limite à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$

La limite de $f$ à gauche de $x_0$ est la limite $l$ en $x_0$ de la restriction $g$ de $f$ sur $\mathcal{D}_f \cap ]-\infty, x_0[$. On note $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$
La limite de $f$ à droite de $x_0$ est la limite $l'$ en $x_0$ de la restriction $h$ de $f$ sur $\mathcal{D}_f \cap ]x_0, +\infty[$. On note $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l'$

**Exemple**

$$\begin{cases} f(x) & = x^2 + 3x - 7 \quad si \quad x < 2 \\ f(x) & = 4x + 1 \quad si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

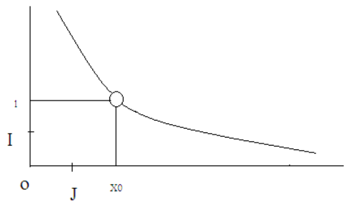
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 7) = 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(4x + 1) = 9$

**Propriétés**

1. Quand $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ , $f$ n'a pas de limite en $x_0$
2. Quand $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ , alors $l$ est la limite de $f$ en $x_0$
3. Quand la limite de $f$ en $x_0$ existe, elle est unique.

**Illustration**

$f(x_0)$ n'existe pas
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$
$l$ est la limite de $f$ en $x_0$




### 6.1.4 Limites et opérations sur les fonctions

Quand $f$ et $g$ ont des limites en $x_0$ , $f + g$ , $fg$ , $\frac{f}{g}$ ont aussi des limites en $x_0$. Ces limites sont données par les théorèmes suivant :

| $\lim f$ | $\lim g$ | $\lim (f+g)$ | $\lim (fg)$ | $\lim (\frac{f}{g})$ |
|---|---|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l + l'$ | $ll'$ | $\frac{l}{l'}$ , $l' \neq 0$ |
| 0 | $l'$ | $l'$ | 0 | 0 |
| $l$ | 0 | $l$ | 0 | $\infty$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{0}{0}$ (FI) |
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | $0 \times \infty$ (FI) | 0 |
| $\infty$ | 0 | $\infty$ | $\infty \times 0(FI)$ | $\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ (FI) |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $\infty - \infty$ | $-\infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ (FI) |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty - \infty$ | $-\infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ (FI) |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ (FI) |

#### 6.1.4.1 Exemples

1. Calculer

$$\lim_{x\to 1}(x^2+3x-5)\sqrt{5x-1} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+x+1}$$

2. Etudier

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-1}{x+4}$$

**Solution**

$$\lim_{x\to 1}(x^2+3x-5)\sqrt{5x-1}=-2 \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+x+1}=\frac{5}{7} \qquad \lim_{x\to -4^-}\frac{x^2+3x-1}{x+4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+}\frac{x^2+3x-1}{x+4}=+\infty$$

#### 6.1.4.2 Les formes indéterminées

Ce sont les résultats $\frac{0}{0}$ , $\infty\times 0$ , $\infty-\infty$ , $\frac{\infty}{\infty}$.On lève l'indétermination par la méthode de factorisation,la méthode de l'expression conjuguée, etc.
**Exemple :**
Calculons

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-x-4}{x^2-x-2}$$

2. $$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

**Solution :**

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-x-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{3+1-4}{1+1-2}=\frac{0}{0} \quad (FI)$$

$\frac{3x^2-x-4}{x^2-x-2}=\frac{(x+1)(3x-4)}{(x+1)(x-2)}=\frac{3x-4}{x-2}$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

2. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=\frac{x+2+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x+2)}-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ d'où

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$$

Pour lever l'indétermination, on peut encore faire une transformation qui ramène à une limite de reférence.
**Exemple :**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\sin x}{x}}\to\frac{0}{1}\to 0$$

### 6.1.5 Limites et inégalités

$f$ et $g$ sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert contenant $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. Si $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) < g(x)$ alors
$$\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$$
2. Si $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) < g(x)$ et si $f$ et $g$ ont des limites en $a$
   - Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$
   - Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
3. Si $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = l$ (Propriété des gendarmes)

Ainsi calculons
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$
$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ avec $x > 0$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

### 6.1.6 Limite d'une fonction composée $g \circ f$

**Propriété**
Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to l} g(x) = l'$ alors on a $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l'$
**Application**
$h(x) = \cos 3x = (g \circ f)(x)$ avec $f(x) = 3x$ et $g(x) = \cos x$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} h(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos 3x = \cos 3(\frac{\pi}{3}) = \cos\pi = -1$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (g \circ f)(x) = -1$$

## 6.2 Continuité

### 6.2.1 Continuité en $a \in \mathcal{D}_f$

($f$ continue en $a$)$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

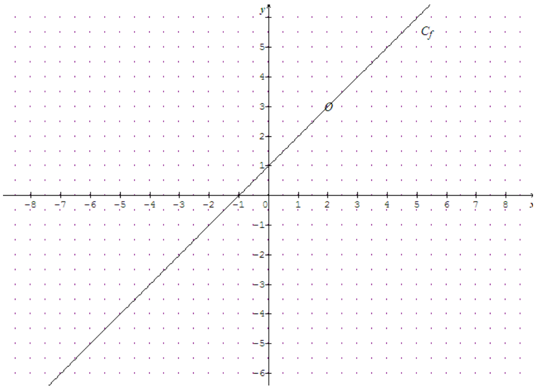
### 6.2.2 Prolongement par continuité d'une fonction $f$ en $a \notin \mathcal{D}_f$

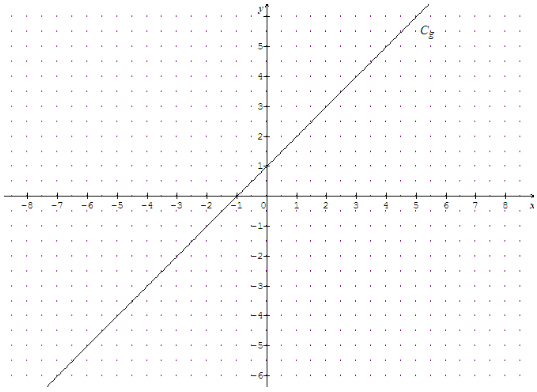
C'est une fonction $g$ qui utilise $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et qui est définie par $\begin{cases} g(x) = & f(x) \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \\ g(a) = & l \end{cases}$

$f$ n'est pas continue en $a$ mais $g$ l'est.
**Exemple**
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \tag{6.1}$$
Déterminons le prolongement par continuité de $f$ en 2

1. $$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{0}{0} \ (FI)$$
$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ d'où
$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x\to2}(x + 1) = 3$$

2. Prolongement
$\begin{cases} g(x) = & x+1 \quad \text{pour} \quad x \neq 2 \\ g(2) = & 3 \end{cases}$




$$h(x) = \frac{5x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2} \tag{6.2}$$

1. Montrer que $h$ est prolongeable par continuité en 1
2. Déterminer le prolongement de $h$ en 1

**Solution**

1. $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{5x^2+x-6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{5x+6}{x+2} = \frac{11}{3}$
2. Prolongement
$\begin{cases} g(x) = & \frac{5x+6}{x+2} \quad \text{pour} \quad x \neq 1 \\ g(1) = & \frac{11}{3} \end{cases}$

### 6.2.3 Continuité sur un intervalle

$f$ est continue sur $]a,b[$ si et seulement si elle est continue en tout élément de $]a,b[$.
$f$ est continue sur $[a,b]$ si et seulement si elle est continue sur $]a,b[$ puis à droite de $a$ et à gauche de $b$.

### 6.2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue $f$

#### 6.2.4.1 Présentation

Soit la fonction $f$.On distingue trois cas :
- $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ si $f$ est croissante sur $[a,b]$ $\quad f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ si $f$ est décroissante sur $[a,b]$
- $f([a,b]) = \{f(a)\} = \{f(b)\}$ si $f$ est constante sur $[a,b]$
- $f([a,b]) = [m, M]$ si $f$ admet un minorant $m$ et un majorant $M$ sur $[a,b]$

#### 6.2.4.2 Propriétés

1. Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle ou un singleton.Un singleton est un ensemble constitué d'un seul élément.
2. Dans certains cas,l'image d'un intervalle dépend du maximum ou du minimum de la fonction dans l'intervalle considéré.

**Exemple**

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \tag{6.3}$$

Déterminons $f([-2,2])$ : $f(-2) = -1$ ; $f(2) = 3$ ; $f'(x) = 3x^2 - 3$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$
$\Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0$
$\Rightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$
$f(1) = -1$ et $f(-1) = 3$ d'où $f([-2,2]) = [-1,3]$.

### 6.2.5 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone $f$

**Propriétés**
$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , $\alpha < \beta$
si $f$ est continue,

1. et strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$ alors $f(]\alpha,\beta[) = ]\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)[$
2. et strictement décroissante sur $]\alpha,\beta[$ alors $f(]\alpha,\beta[) = ]\lim_{x\to\beta^-} f(x), \lim_{x\to\alpha^+} f(x)[$
3. et strictement croissante sur $[\alpha,\beta]$ alors $f([\alpha,\beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
4. et strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$ alors $f([\alpha,\beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$

**Exemple**

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2} \tag{6.4}$$

Déterminons $f(]2,+\infty[)$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ $\quad f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$
$f$ est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
$f(]2,+\infty[) = ]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 2} f(x)[ = ]1,+\infty[$
**Exemple**

$$f(x) = x^3 + 5x \tag{6.5}$$

Déterminons $f(]-1,1[)$
$f$ est continue et strictement croissante sur $]-1,1[$. $f(-1) = -6$ ; $f(1) = 6$. $f(]-1,1[) = ]-6,6[$

### 6.2.6 Calcul approché des zéros d'une fonction continue $f$

Un zéro de $f$ est un réel $\alpha$ telque $f(\alpha) = 0$
**Propriété**
Si $f$ est continue sur l'intervalle $I$ et si $\alpha$ et $\beta$ sont des éléments de $I$ tels que $f(\alpha)f(\beta) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution unique $x_0 \in ]\alpha,\beta[$.
Si en plus $f$ est strictement monotone, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in ]\alpha,\beta[$.
**Application**

$$f(x) = -x^3 - x + 4 \tag{6.6}$$

Démontrer que l'équation $-x^3 - x + 4 = 0$ admet une solution unique $x_0 \in ]1,2[$.
**Solution**
$f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = -3x^2 - 1 = -(3x^2 + 1) < 0$. $f(1) = 2$ $\quad f(2) = -6$
Comme $f$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et sur $[1,2]$ en particulier et que f(1) et f(2) sont de signe contraire, l'équation $-x^3 - x + 4 = 0$ admet une solution unique $x_0 \in ]1,2[$.

La recherche d'un encadrement ou d'une valeur approchée du zéro utilise la **méthode de balayage** ou la **méthode de dichotomie**.

**Méthode de balayage**

$f(x) = -x^3 - x + 4$

$f(1,1) = 1,56$ ;$f(1,2) = 1,07$ ;$f(1,3) = 0,5$ ;$f(1,4) = -0,14$ d'où

$1,3 < x_0 < 1,4 \Rightarrow x_0 = \frac{1,3+1,4}{2} = 1,35.$

**Méthode de dichotomie**

$f(2) < 0$ ; $f(1,5) = f(\frac{1+2}{2}) < 0$ ;$f(1,25) > 0$ $\quad 1,25 < x_0 < 1,5$

### 6.2.7 Autres propriétés d'une fonction continue et strictement monotone $f$

Si $f$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I$ alors :

- $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$
- $f$ admet une réciproque $f^{-1}$ définie sur $f(I)$
- $f^{-1}$ est continue sur $f(I)$ et admet le même sens de variation que $f$.
- Dans un repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, $(C_f)$ et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice)

**Application**

$$f(x) = x^3 + 2x - 5 \tag{6.7}$$

définie de $[1, 3]$ vers $\mathbb{R}$

1. Montrer que $f$ admet une réciproque $f^{-1}$
2. Donner l'ensemble de départ de $f^{-1}$
3. Donner le sens de variation de $f^{-1}$
4. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$ admet une solution unique $x_0 \in ]1, 2[$.

**Solution**

1. Montrons que $f$ admet une réciproque $f^{-1}$
   $f$ est continue et dérivable sur $[1, 3]$ comme une fonction polynôme. $f'(x) = 3x^2+2 > 0$,comme $f$ est continue et strictement croissante sur $[1, 3]$,elle constitue une bijection et elle admet une réciproque $f^{-1}$.
2. Ensemble de départ de $f^{-1}$
   C'est $f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = [-2, 28]$
3. Sens de variation de $f^{-1}$
   $f^{-1}$est strictement croissante comme $f$
4. Montrons que l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$ admet une solution unique $x_0 \in ]1, 2[$.
   $f(1) = -2$ ;$f(2) = 7$. $f$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, sur $[1, 2]$ en particulier, en plus $f(1)$ et $f(2)$ sont de signe contraire alors l'équation $x^3+2x-5 = 0$ admet une solution unique $x_0 \in ]1, 2[$.

### 6.2.8 Fonction racine $n^{ieme}$ et fonction puissance d'exposant rationnel

#### 6.2.8.1 Fonction racine $n^{ieme}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

C'est la fonction

$$\left|\begin{array}{c|c} f : & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \end{array}\right|$$

**Exemple**

$$\left|\begin{array}{c|c} f : & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \end{array}\right|$$

**Remarque**
La fonction racine $n^{ieme}$ est la bijection réciproque de la fonction puissance $n^{ieme}$ définie par $\left| \; \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n \end{array} \right. \right|$ Avec $(n \in \mathbb{N}^*)$

**Propriétés des racines $n^{ieme}$**

1. $\sqrt[n]{x} \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$
2. $\sqrt[n]{x^n} = x$
3. $x \in \mathbb{R}_+$ , $y \in \mathbb{R}_+$ $\quad y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$
4. $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
5. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[pn]{x}$ car $(x^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{pn}}$
7. $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[p]{x} = \sqrt[pn]{x^{n+p}}$ car $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $\quad \sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$ $\quad \sqrt[n]{x} \times \sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} = x^{\frac{p+n}{pn}} = (x^{p+n})^{\frac{1}{pn}} = \sqrt[pn]{x^{p+n}}$

#### 6.2.8.2 Fonction puissance d'exposant rationnelle

**Rappel**
Un rationnel est une écriture qui peut se mettre sous la forme $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*)$.La fonction puissance d'exposant rationnelle est de la forme $\left| \begin{array}{c} f : \\ x \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ \mapsto x^r \end{array} \Bigg|$ Où $r \in \mathbb{Q}$

**Propriétés**
$r \in \mathbb{Q} \quad , \quad r' \in \mathbb{Q} \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad y \in \mathbb{R}_+$

1. $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
2. $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
3. $(xy)^r = x^r \times y^r$
4. $\frac{1}{x^{-r}} = x^r$
5. $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

# Dérivabilité

## 7.1 Fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

C'est une fonction $f$ pour laquelle

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

($l \in \mathbb{R}$).
$l$ se note $f'(x_0)$.Si on pose $h = x - x_0 \Rightarrow x = h + x_0$
$\begin{cases} x & \to x_0 \\ h & \to 0 \end{cases}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h} = l$$

$$l \approx \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f(h + x_0) = f(x_0) + lh + h\varphi(h)$$

Avec

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

$\varphi$ s'appelle differentielle de $f$

## 7.2 Interprétation géometrique de la derivée en $x_0$

Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors sa représentation graphique admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente ayant pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{7.1}$$

## 7.3 Dérivée à gauche, Dérivée à droite

Quand il existe , le nombre

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se note $f'_g(x_0)$ et se nomme dérivée à gauche de $x_0$ ; $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente à gauche ayant pour équation

$$y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{7.2}$$

Quand il existe , le nombre

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se note $f'_d(x_0)$ et se nomme dérivée à droite de $x_0$ ; $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente à droite ayant pour équation

$$y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{7.3}$$

Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ , $f$ est non dérivable en $x_0$, $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux.
Pour

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$f$ est dérivable en $x_0$. $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente horizontale ayant pour équation $y = f(x_0)$.
Pour

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad ou \quad (-\infty)$$

$f$ n'est pas dérivable en $x_0$. $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une demi-tangente verticale ayant pour équation $x = x_0$.

**Exemple**

$f(x) = |x^2 + x - 6| \quad g(x) = x^2 - 4x + 7 \quad h(x) = \sqrt{x}$

Montrons que :

1. $f$ est non derivable en 2
2. $\mathcal{C}_g$ admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale
3. $\mathcal{C}_h$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

**Solution**

1.

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-6$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\|x^2+x-6\|$ | $x^2+x-6$ | | $-x^2-x+6$ | | $x^2+x-6$ | |

à gauche de 2, $f(x) = -x^2 - x + 6$ et $f'_g(x) = -2x - 1$
$f'_g(2) = -2(2) - 1 = -5$
à droite de 2 , $f(x) = x^2 + x - 6$ et $f'_d(x) = 2x + 1$
$f'_d(2) = 2(2) + 1 = 5$ d'où $f'_g(2) \neq f'_d(2)$

2. $g(x) = x^2 - 4x + 7 \quad g'(x) = 2x - 4 \quad g'(2) = 2(2) - 4 = 0$
L'équation de la tangente est $y = g'(2)(x - 2) + g(2) = g(2) = 2^2 - 4(2) + 7 = 3$
$y = 3$

3. $h(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x \times \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

D'où $h$ admet au point 0 une demi-tangente verticale.

Toute fonction dérivable en $x_0$ est continue en $x_0$. Toute fonction continue en $x_0$ n'est pas dérivable en $x_0$.

## 7.4 Fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$

On appelle ainsi une fonction dérivable en tout élément de cet intervalle $]a, b[$.
Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

## 7.5 Fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$

C'est une fonction dérivable á la fois sur $]a, b[$,à droite de $a$ et à gauche de $b$.
**Exemple**

$$f(x) = \frac{x-5}{x+3} \tag{7.4}$$

est dérivable sur $[2, 8]$

## 7.6 Dérivées successives d'une fonction $f$

**Exemple**

$$f(x) = x^6 + 4x - 7 \tag{7.5}$$

| | |
|---|---|
| Dérivée $1^{ere}$ | $f'(x) = 6x^5 + 4$ |
| $2^{eme}$ | $f''(x) = 30x^4$ |
| $3^{eme}$ | $f'''(x) = 120x^3$ |
| $4^{eme}$ | $f^4(x) = 360x^2$ |
| $5^{eme}$ | $f^5(x) = 720x$ |
| $6^{eme}$ | $f^6(x) = 720$ |
| $7^{eme}$ | $f^7(x) = 0$ |
| ... | ... |
| $n^{eme}$ | $f^n(x) = 0$ |

Une fonction peut être dérivable une fois, deux fois,...,$n$ fois

## 7.7 Dérivée de $g \circ f$ composée de $f$ par $g$

Si $f$ est dérivable sur l'intervalle $I$ et si $g$ est dérivable sur un intervalle $J$ contenant $f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur $I$. On a $\forall x \in I$ ,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \tag{7.6}$$

**Exemple**
$f(x) = 5x + 2$ $g(x) = x^7$ $h(x) = (5x + 2)^7 = g \circ f$ $f'(x) = 5$ $g'(x) = 7x^6$
$h'(x) = 7 \times 5 \times (5x + 2)^6$ $h'(x) = 35(5x + 2)^6$
**Application**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $(1 - 4x)^3$ | $-12(1 - 4x)^2$ |
| $\cos 3x + 1$ | $-3 \sin 3x + 1$ |
| $\sin 2 - 5x$ | $-5 \cos 2 - 5x$ |

## 7.8 Dérivée de $f^{-1}$,réciproque d'une fonction continue et strictement monotone $f$

$x \in I$ , $y \in f(I)$ ,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{7.7}$$

$$y = f(x) \tag{7.8}$$

**Exemple**
$f(x) = x^3 + x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$
$f(1) = 3$
$f'(1) = 4 \qquad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

**Application**

$f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$
Sachant que $f$ est bijective et $f(1) = 4$,calculer $(f^{-1})'(4)$.
$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \qquad f(1) = 4 \qquad f'(1) = 9$ d'où $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{9}$

## 7.9 Dérivées des fonctions rationnelles de reférence.

### 7.9.1 Dérivées des fonctions de reférence.

| Ensemble de dérivabilité | Fonction | dérivée |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = a\,;\, a \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = x^r\,;\, r \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = rx^{r-1}$ |
| $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ | $f(x) = \frac{1}{x^r}\,;\, r \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = \frac{-r}{x^{r+1}}$ |
| $]0, +\infty[$ | $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$ |
| $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ | $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ | $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ | $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ | $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ |

### 7.9.2 Dérivées et opérations sur les fonctions dérivables.

Si $u$ et $v$ sont dérivables et ont pour dérivées respectives $u'$ et $v'$ ;

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $ku$ , $(k \in \mathbb{R})$ | $ku'$ |
| $u + v$ | $u' + v'$ |
| $uv$ | $u'v + v'u$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u^r$ , $(r \in \mathbb{R})$ | $ru'u^{r-1}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ |
| $\cos u$ | $-u'\sin u$ |
| $\sin u$ | $u'\cos u$ |
| $\cos(ax + b)$ | $-a\sin(ax + b)$ |
| $\sin(ax + b)$ | $a\cos(ax + b)$ |

**Application**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $f(x) = (3x - 1)^7$ | $f'(x) = 21(3x - 1)^6$ |
| $f(x) = \cos(\frac{2x+1}{5})$ | $f'(x) = \frac{2}{5}\sin(\frac{2x+1}{5})$ |
| $f(x) = \sin(1 - 3x)$ | $f'(x) = -3\cos(1 - 3x)$ |
| $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ | $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ |
| $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$ | $f'(x) = \frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}$ |
| $f(x) = \sqrt[3]{\cos 4x}$ | $f'(x) = (\frac{-4}{3}\sin 4x)(\cos 4x)^{\frac{-2}{3}}$ |

## 7.10 Application de la dérivée

### 7.10.1 A l'étude du sens de variation sur l'intervalle $I$

$f$ est croissante sur $I$ si $\forall x \in I$ , $f'(x) \geq 0$
$f$ est décroissante sur $I$ si $\forall x \in I$ , $f'(x) \leq 0$
$f$ est constante sur $I$ si $\forall x \in I$ , $f'(x) = 0$

### 7.10.2 A la recherche des extrema : Minimum et Maximum

**Propriété**
Si $f'(x_0) = 0$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$ alors $f(x_0)$ est un extremum relatif.

### 7.10.3 A l'encadrement

**Propriété** 1 : (Inégalité des accroissements finis)
$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$. Si $a \in I$ , $b \in I$ , $a < b$ et s'il existe deux nombres réels $m$ et $M$ tels que pour tous $x \in [a, b]$ , $m \leq f'(x) \leq M$ , alors on a
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
**Propriété** 2 :
$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$. S'il existe un réel $M$ tel que $\forall x \in I$ , $|f'(x)| < M$ alors pour tous les réels $a \in I$ et $b \in I$ , $|f(b) - f(a)| < M|b-a|$.
**Exemple**
Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ , $-x \leq \sin x \leq x$.
$f(x) = \sin x$ , $f'(x) = \cos x$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.
L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction connue nous donne sur l'intervalle $[0, x]$ :
$-1(x-0) \leq \sin x - \sin 0 \leq 1(x-0)$ d'où $-x \leq \sin x \leq x$

### 7.10.4 Au calcul de certaines limites

**Propriété** :
$f$ , $u$ , $v$ sont des fonctions dérivables sur $I$
Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ $(FI)$
alors on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$$

**Exemple**

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4}$$

$\begin{cases} x \to -1 \\ \frac{x^2-x-2}{x^2-3x-4} \to \frac{0}{0} \end{cases}$ Levons l'indétermination.

**Première méthode**

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(x-2)}{(x-4)} \tag{7.9}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)}{(x-4)} = \frac{3}{5}$$

**Deuxième méthode**

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to -1} \frac{2x - 1}{2x - 3} = \frac{2(-1) - 1}{2(-1) - 3} = \frac{3}{5}$$

## Application

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}}=\frac{3}{2}$$

# Etude des fonctions

## 8.1 Quelques généralités

### 8.1.1 Représentations graphiques et transformations du plan

Les transformations du plan sont utilisées pour déduire les représentations graphiques de certaines fonctions de celles d'autres fonctions dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

1. Si $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$ alors la courbe $C_g$ de la fonction $g$ est l'image de la courbe $C_f$ de la fonction $f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}(\alpha, \beta)$
2. Si $g(x) = -f(x)$ alors $C_g$ est le symétrique de $C_f$ par rapport à $(OI)$.
3. Si $g(x) = f(-x)$ alors $C_g$ est le symétrique de $C_f$ par rapport à $(OJ)$.
4. Si $g(x) = -f(-x)$ alors $C_g$ est le symétrique de $C_f$ par rapport à l'origine $O$.
5. Si $g(x) = |f(x)|$ alors $C_g$ est constituée de la partie de $C_f$ située au dessus de $(OI)$ et du symétrique par rapport à l'axe $(OI)$ de la partie de $C_f$ située en bas de $(OI)$.
6. Si $g(x) = f^{-1}(x)$ alors $C_g$ est le symétrique de $C_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
7. Si $g(x) = f(|x|)$ alors $C_g$ est constituée de la partie de $C_f$ associée aux $x > 0$ et du symétrique par rapport à l'axe $(OJ)$ de cette partie.

### 8.1.2 Centre de symétrie

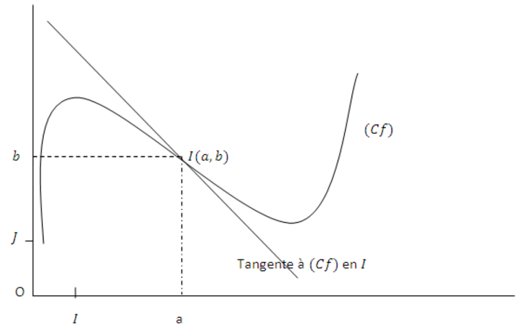
($I(a, b)$ est centre de symétrie)$\Leftrightarrow$($\forall x \in D_f$ , $a - x \in D_f$ , $a + x \in D_f$ , $f(a - x) + f(a + x) = 2b$)
($I(a, b)$ est centre de symétrie)$\Leftrightarrow$($\forall x \in D_f$ , $2a - x \in D_f$ , $f(2a - x) + f(x) = 2b$).
**Application**
Soit la fonction $\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x^2+1}{x+1} \end{array}$ . $I(-1, -2)$ est-il centre de symétrie de $C_f$ ?
$a - x = -1 - x$ et $a + x = -1 + x$. $f(a - x) = f(-1 - x) = \frac{x^2+2x+2}{-x}$ et $f(a + x) = f(-1 + x) = \frac{x^2-2x+2}{x}$ d'où $f(a - x) + f(a + x) = f(-1 - x) + f(-1 + x) = \frac{x^2+2x+2}{-x} + \frac{x^2-2x+2}{x} = \frac{4x}{-x} = -4 = 2(-2)$.Donc $I(-1, -2)$ est centre de symétrie de $C_f$.

### 8.1.3 Axe de symétrie

(La droite $\Delta : x = a$ est axe de symétrie pour $C_f$)$\Leftrightarrow$($\forall x \in D_f$ , $a - x \in D_f$ , $a + x \in D_f$ , $f(a - x) = f(a + x)$).
(La droite $\Delta : x = a$ est axe de symétrie pour $C_f$)$\Leftrightarrow$($\forall x \in D_f$ , $2a - x \in D_f$ , $f(2a - x) = f(x)$)
**Application**
La droite $\Delta : x = 2$ est-il axe de symétrie pour la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 7$ ?
$a - x = 2 - x$ et $a + x = 2 + x$.$f(a - x) = f(2 - x) = x^2 + 3$ et $f(a + x) = f(2 + x) = x^2 + 3$ d'où $f(a - x) = f(a + x) = x^2 + 3$.La droite $\Delta : x = 2$ est axe de symétrie pour la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

### 8.1.4 Point d'inflexion

($I(a,b)$ est un point d'inflexion )$\Leftrightarrow$($f''(a)=0$ et $f''(x)$ change de signe en $a$).




**Exemple**

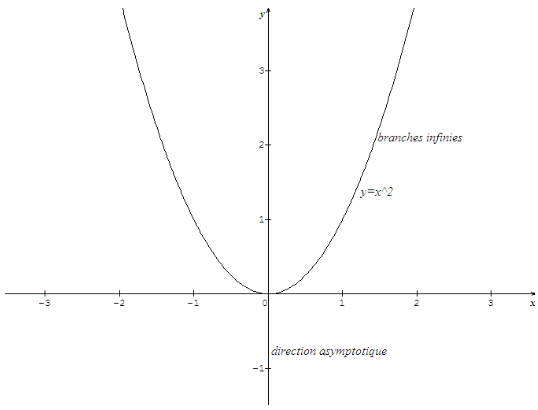
$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3-3x^2+8 \end{array}$. Montrons que $I(1,6)$ est un point d'inflexion.

$f'(x)=3x^2-6x$ et $f''(x)=6x-6$.

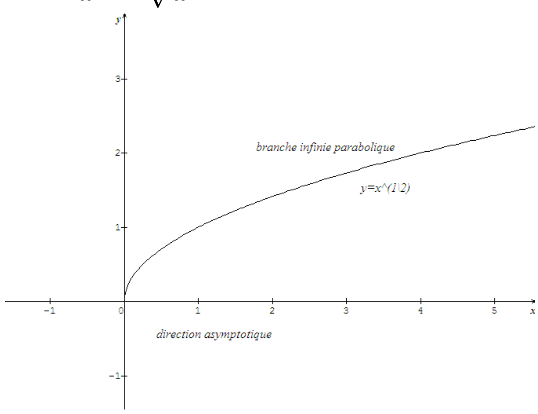
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$ et $f(1)=6$.

### 8.1.5 Branches infinies

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$.




$g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$.




La direction d'une branche dépend du nombre $\frac{f(x)}{x}$

1. Pour $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ , $(C_f)$ admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique $(OJ)$.
   **Exemple :** $f(x)=x^2$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

2. Pour $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ , $(C_f)$ admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique $(OI)$.
   **Exemple :** $f(x)=\sqrt{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$
3. Pour $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ou $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ , on calcule $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ ou $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$.
   (a) Si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\pm\infty$ alors $(C_f)$ admet une branche infinie ayant pour direction asymptotique celle de la droite d'équation $y=ax$.
   (b) Si $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b$ alors $(C_f)$ admet une branche infinie vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ayant pour asymptote la droite d'équation $y=ax+b$. La position de l'asymptote oblique par rapport à $(C_f)$ dépend du nombre $e(x)=[f(x)-(ax+b)]$.
   Si $e(x)>0$ alors $(C_f)$ est au dessus de l'asymptote.
   Si $e(x)<0$ alors $(C_f)$ est en dessous de l'asymptote.

   **Exemple :** Soit la fonction $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x-2}$.Montrons que $(C_f)$ admet une asymptote oblique puis donnons la position relative de $(C_f)$ par rapport à l'asymptote.
   $\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^2+3x-5}{x-2}}{x}=\frac{x^2+3x-5}{x^2-2x}$. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-5}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$
   $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{x^2+3x-5}{x-2}-x]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{5x-5}{x-2}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{5x}{x}]=5$ d'où la droite d'équation $y=x+5$ est asymptote oblique à $(C_f)$.
   $f(x)-(x+5)=\frac{x^2+3x-5}{x-2}-(x+5)=\frac{5}{x-2}$.En étudiant le signe de $\frac{5}{x-2}$ sur $\mathbb{R}$ on déduit que pour $x\in]-\infty,2[$ , $f(x)-(x+5)<0$ et $(C_f)$ est en dessous de l'asymptote.Pour $x\in]2,+\infty[$ , $f(x)-(x+5)>0$ et $(C_f)$ est au dessus de l'asymptote.
4. Pour $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$ ou $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$ , $(C_f)$ admet une branche infinie ayant pour asymptote horizontale la droite d'équation $y=a$.
   **Exemple :** $f(x)=\frac{x-3}{2x+1}$
   $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ d'où la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à $(C_f)$.
5. Pour $\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ , $(C_f)$ admet une branche infinie ayant pour asymptote verticale la droite d'équation $x=a$.
   **Exemple :** $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x-2}$
   $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+3x-5}{x-2}=-\infty$ et $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+3x-5}{x-2}=+\infty$. La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $(C_f)$.

## 8.2 Plan d'étude d'une fonction.

L'étude d'une fonction comporte les étapes suivantes :

1. Détermination du domaine de définition.
2. Détermination du domaine d'étude compte tenu de la parité ou de la périodicité.
3. Calcul des limites aux bornes du domaine d'étude.
4. Etude de la dérivabilité et de la dérivée.
5. Tableau de variation.
6. Etude des branches infinies.
7. Tracer la courbe.

## 8.3 Quelques exemples.

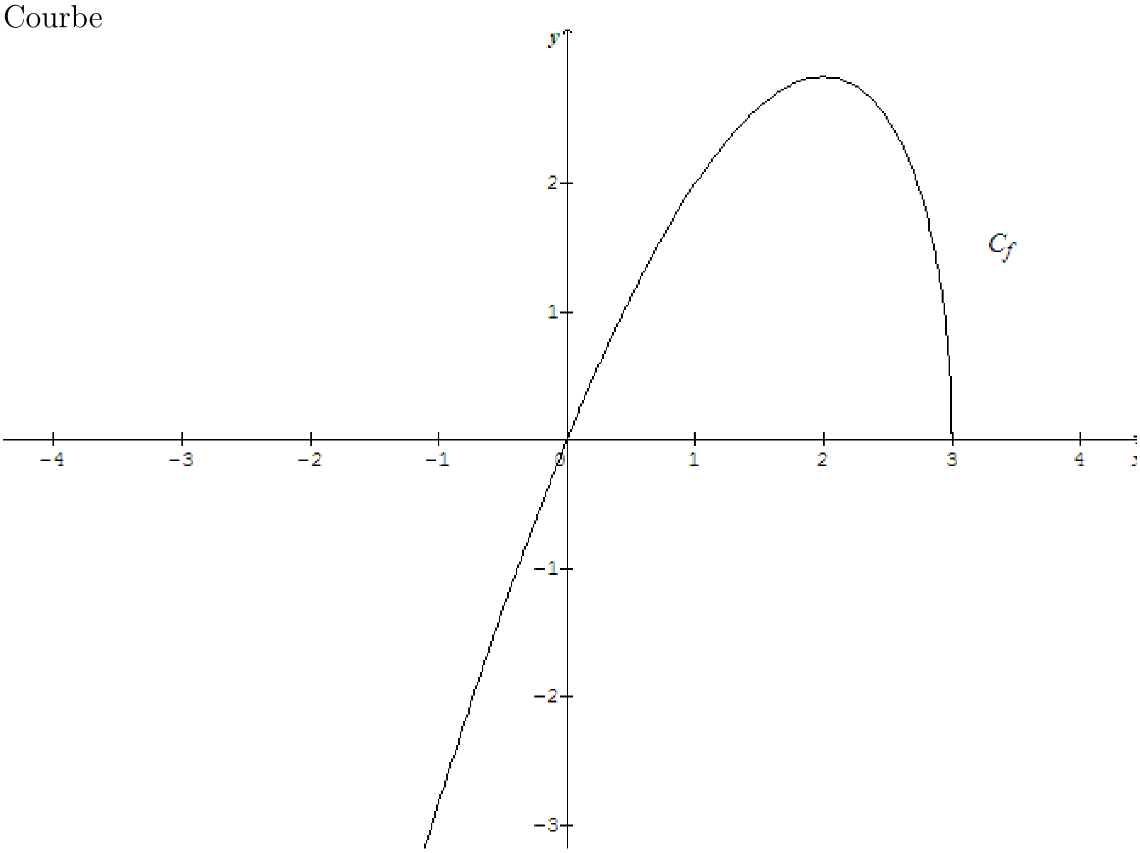
### 8.3.1 Exemple 1

$$f(x) = x\sqrt{6-2x} \tag{8.1}$$

1. $D_f$ : $f$ existe si et seulement si $6-2x \geq 0$ soit $x \leq 3$ d'où $D_f = ]-\infty, 3]$
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{6-2x} = -\infty$
   $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x\sqrt{6-2x} = 3\sqrt{6-6} = 0$
3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{6-2x} = +\infty$.$(C_f)$ admet en $-\infty$ une branche infinie parabolique ayant pour direction asymptotique l'axe $(OJ)$.
4. $f$ n'est pas dérivable en 3.$(C_f)$ admet au point d'abscisse 3 une demi-tangente verticale d'équation $x = 3$.
5. $f'(x) = \frac{-3x+6}{\sqrt{6-2x}}$.
   $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3x+6}{\sqrt{6-2x}} = 0 \Rightarrow x = 2$.
   $f(2) = 2\sqrt{6-2(2)} = 2\sqrt{2}$
6. Tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

7. Courbe



### 8.3.2 Exemple 2

$$f(x) = \sin x + \cos x \tag{8.2}$$

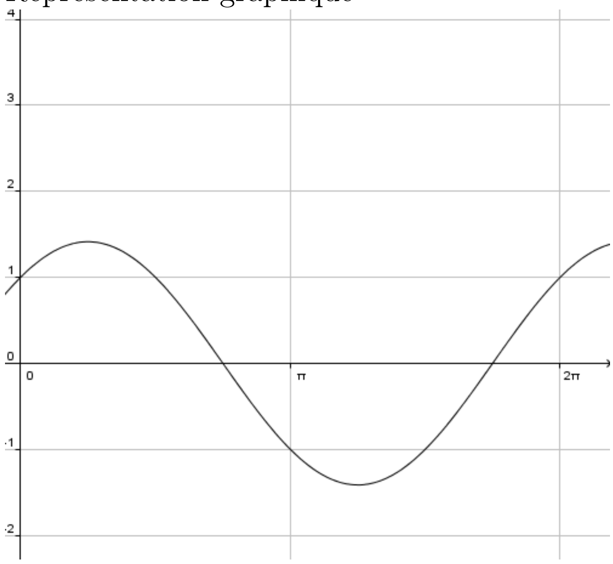
1. $D_f = \mathbb{R}$. $f$ est périodique de période $2\pi$ car
   $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$.
   Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques de période $2\pi$ et $\tan x$ de période $\pi$.
   $\sin(ax+b)$ et $\cos(ax+b)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.On l'étudie sur un intervalle d'amplitude $2\pi$.
2. $D_E = [0, 2\pi]$
3. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x + \cos x = 1$
   $\lim_{x\to 2\pi} f(x) = \lim_{x\to 2\pi} \sin x + \cos x = 1$
4. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont sur $[0, 2\pi]$.
   $f'(x) = \cos x - \sin x$
   $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
   $\begin{cases} x = & \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ x = & -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 0 = & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

   | $k$ | 0 | 1 |
   |---|---|---|
   | $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ |

   $f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
   $f(\frac{5\pi}{4}) = \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
5. Tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) = \cos x - \sin x$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | $-\sqrt{2}$ | ↗ | 1 |

6. Representation graphique




**Remarque**
Les fonctions $\cos(ax+b)$ et $\sin(ax+b)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.Une fonction écrite avec sinus , cosinus et tangente a pour période le $PPMC$ des périodes.

# Primitives

## 9.1 Primitive d'une fonction sur un intervalle $K$

### 9.1.1 Présentation

Dans $\mathbb{R}$ , $F(x) = \sin x$ , $f(x) = \cos x$ et on a $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$. $f$ est la dérivée de $F$ et $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

### 9.1.2 Définition

Une fonction $F$ est une primitive sur l'intervalle $K$ d'une fonction $f$ si et seulement si $F$ est dérivable sur l'intervalle $K$ et admet $f$ pour dérivée.

## 9.2 Condition d'existence d'une primitive.

$f$ admet une primitive sur $K$ si et seulement si elle est continue sur $K$

## 9.3 Les primitives d'une même fonction sur l'intervalle $K$.

| Fonctions | Dérivée |
|---|---|
| $F_1(x) = \sin x$ | $\cos x$ |
| $F_2(x) = \sin x + 3$ | $\cos x$ |
| $F_3(x) = \sin x - 5$ | $\cos x$ |
| $F_4(x) = \sin x + 6$ | $\cos x$ |

$F_1$ , $F_2$ , $F_3$ , $F_4$ sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de $\cos x$.

$F$ étant une primitive de $f$ sur $K$ , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ est une autre primitive de $f$ sur $K$. L'écriture $F(x) + c$ représente toutes les primitives de $f$ sur $K$. L'écriture $\sin(x) + c$ représente toutes les primitives de $\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

## 9.4 Les primitives vérifiant les conditions initiales.

Ce sont les primitives prenant pour valeur $y_0$ en $x_0$. $F(x) + c$ représente toutes les primitives de $f$ sur $K$ , celle qui prend pour valeur $y_0$ en $x_0$ est telle que $F(x_0) + c = y_0$ d'où $c = y_0 - F(x_0)$. La primitive cherchée est $x \mapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$.

**Exemple**

Déterminons la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \cos x$ qui prend pour valeur 4 en $\frac{\pi}{2}$.

**Solution** :

$F(x) = \sin x + c$ ; $(c \in \mathbb{R})$ represente les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f$. On a

$f(\frac{\pi}{2}) + c = 4 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} + c = 4 \Rightarrow 1 + c = 4 \Rightarrow c = 3$ d'où La primitive cherchée est $F(x) = \sin x + 3$.

## 9.5 Tableau des primitives usuelles.

### 9.5.1 Primitives des fonctions de référence.

| Fonction $f$ | Intervalle où $f$ admet des primitives | Primitives |
|---|---|---|
| $f(x) = a\ (a \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = ax + c$ |
| $f(x) = x^r$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^r}$ | $\mathbb{R}^*$ | $F(x) = \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^*_+$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + c$ |
| $f(x) = \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = -\cos x + c$ |
| $f(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \sin x + c$ |
| $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$ | $F(x) = \tan x + c$ |
| $f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ | $F(x) = \coth x + c$ |
| $f(x) = \sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)$ |
| $f(x) = \cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ |

**Application** :

| Fonction $f$ | Intervalle où $f$ admet des primitives | Primitives |
|---|---|---|
| $f(x) = x^4 - 5$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - 5x + c$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^*_+$ | $F(x) = \frac{-1}{x} + 2\sqrt{x} + c$ |
| $f(x) = 7\sin x - \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = -7\cos x - \sin x + c$ |
| $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) + \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$ | $F(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) + \tan x + c$ |

### 9.5.2 Primitives et opérations sur les fonctions.

$U$ et $V$ sont dérivables et ont pour dérivées respectives $U'$ et $V'$.

| Fonctions | Primitives |
|---|---|
| $KU'$ | $KU$ |
| $U' + V'$ | $U + V$ |
| $U'V + V'U$ | $UV$ |
| $\frac{U'V - V'U}{V^2}$ | $\frac{U}{V}$ |
| $U^{r-1}U'$ ; $r \in Q \setminus \{-1\}$ | $\frac{U^{r+1}}{r+1}$ |
| $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$ | $\sqrt{U}$ |
| $U'\cos U$ | $\sin U$ |
| $U'\sin U$ | $-\cos U$ |

**Application** :

Complètons le tableau suivant :

| Fonctions | Primitives |
|---|---|
| $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$ | $F(x) = \sqrt{3x-5} + c$ |
| $f(x) = 2x\sin x^2$ | $F(x) = -\cos x^2 + c$ |

## 9.6 Recherche des primitives.

### 9.6.1 Recherche utilisant le tableau.

Le tableau des primitives est parcouru pour rechercher celle qui correspond á la formule donnée.

**Exercice :**

Determiner la primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 6(2x+3)^5 - \frac{4}{\sqrt{x}} \tag{9.1}$$

qui prend en 1 la valeur 8.

$$F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{6(2x+3)^6}{12} - 4(2\sqrt{x}) = \frac{-1}{x} + \frac{(2x+3)^6}{2} - 8\sqrt{x} + c$$

$F(1) = 8 \Rightarrow c = \frac{15591}{2}$ d'où

$$F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{(2x+3)^6}{2} - 8\sqrt{x} + \frac{15591}{2} \tag{9.2}$$

### 9.6.2 Recherche qui exige la transformation de la formule.

Déterminer les primitives de $f$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = (4x+1)(2-x)$
2. $f(x) = \frac{5x^4-2x^2+5}{x^2}$
3. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+1}$

**Solution**

1. $f(x) = (4x+1)(2-x) = -4x^2 + 7x + 2$
   $F(x) = \frac{-4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x + c$
2. $f(x) = \frac{5x^4-2x^2+5}{x^2} = 5x^2 - 2 + \frac{5}{x^2}$
   $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - 2x - \frac{5}{x} + c$
3. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+1} = x - 2$
   $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

### 9.6.3 Recherche exigeant la linéarisation ou la transformation de polynômes trigonométrique.

**Exemple :**

Déterminons les primitives de $f$ dans chacun des cas :

1. $f(x) = \cos^2 x$
2. $f(x) = \cos^3 x$
3. $f(x) = \sin^4 x$

**Solution :**

1. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
   $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$
2. $f(x) = \cos^3 x = \cos^2 x.\cos x = (1 - \sin^2 x).\cos x = \cos x - \sin^2 x.\cos x$
   $F(x) = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + c$
3. $f(x) = \sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$
   $F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$

# Fonction Logarithme Népérien

## 10.1 Définition

La fonction logarithme népérienne c'est la primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x=1$. On la note : $\begin{array}{rl} \ln : & ]0,+\infty[ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \ln x \end{array}$

**Application :**

| $x$ | $0,1$ | $0,7$ | $1$ | $1,5$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | $-2,3$ | $-0,35$ | $0$ | $0,4$ | $1,93$ |

## 10.2 Propriétés données par la définition.

1. $D_{\ln} = ]0,+\infty[$
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
3. $\ln 1 = 0$
4. La fonction ln est strictement croissante car $\frac{1}{x} > 0$
   $a \in \mathbb{R}_+^*$ , $b \in \mathbb{R}_+^*$
5. $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
6. $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
7. Pour $0 < a < 1$ , $\ln a < 0$
   Pour $a > 1$ , $\ln a > 0$

## 10.3 Ensemble de définition des fonctions écrites avec $\ln$.

$\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$. $\ln|u(x)|$ existe si et seulement si $u(x) \neq 0$.
**Exemple :**Déterminons $D_f$ dans chacun des cas suivant :

1. $f(x) = \ln(2-x)$
2. $f(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$
3. $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x-2})$
4. $f(x) = \ln|x^2 + x - 6|$

**Solution :**

1. $f(x) = \ln(2-x)$ existe si et seulement si $2 - x > 0 \to x < 2$. $D_f = ]-\infty, 2[$
2. $f(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$ existe si et seulement si $-x^2 - x + 2 > 0$. $D_f = ]-2, 1[$
3. $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x-2})$ existe si et seulement si $\frac{x+1}{x-2} > 0$. $D_f = ]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$
4. $f(x) = \ln|x^2 + x - 6|$ existe si et seulement si $x^2 + x - 6 \neq 0$ soit $x \neq -3$ et $x \neq 2$. $D_f = ]-\infty, -3[\cup]-3, 2[\cup]2, +\infty[$

## 10.4 Le nombre $e$

C'est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$. On l'appelle base de logarithme népérien. C'est un irrationnel. $e \simeq 2,71828$. Dans les résultats on conserve $e$ sauf si les valeurs approchées sont exigées. Dans toutes opérations où cela est necessaire , 1 est remplacé par $\ln e$ ou $\ln e$ est remplacé par 1.

## 10.5 Propriétés algébriques de la fonction ln

$a \in \mathbb{R}_+^*$ , $b \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$
3. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$ , $r \in \mathbb{Q}$

**Exemple :**

$\ln \sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln 2$

$\ln 64 = \ln 2^6 = 6 \ln 2$

$\ln 4\sqrt{5} = \ln 4 + \ln \sqrt{5} = \ln 2^2 + \ln 5^{\frac{1}{2}} = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5$

## 10.6 Equations et Inéquations écrites avec ln

### 10.6.1 Equation du type $\ln u(x) = \ln v(x)$

La résolution consiste à la détermination de l'ensemble de validité donné par les contraintes $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$. $\ln u(x) = \ln v(x) \Rightarrow u(x) = v(x)$.

**Exemple :** Résolvons dans $\mathbb{R}$

$$\ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x) \tag{10.1}$$

$$\ln(x + 2) = 2 \tag{10.2}$$

**Solution :**

1. Contraintes sur $x$. $x^2 - 4 > 0$ et $1 - 4x > 0$ d'où $E_v = ]-\infty, -2[$ , $S = \{-5\}$
2. $E_v = ]-2, +\infty[$ , $S = \{e^2 - 2\}$

### 10.6.2 Inéquation de la forme $\ln u(x) < \ln v(x)$

L'ensemble de validité est donné par les contraintes $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.
$\ln u(x) < \ln v(x) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

**Application :** Resolvons dans $\mathbb{R}$ :

$$\ln(2x - 4) < \ln(6 - x) \tag{10.3}$$

$$\ln(2 - x) > -1 \tag{10.4}$$

On trouve les solutions respectives $S_1 = ]2, \frac{10}{3}[$ et $S_2 = ]-\infty, 2 - \frac{1}{e}[$

### 10.6.3 Equations de la forme $a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$

On effectue un changement d'inconnue en posant $u = \ln x$. L'équation devient $au^2 + bu + c = 0$.

**Exemple :**

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $-(\ln x)^2 - (\ln x) + 2 = 0$.

$E_v = \mathbb{R}_+^*$. Posons $u = \ln x$. L'équation devient $-u^2 - u + 2 = 0$ d'ou $u = 1$ ou $u = -2$. En revenant au changement d'inconnue , $\ln x = 1 = \ln e \Rightarrow x = e$ et $\ln x = -2 = -2 \times 1 = -2 \ln e = e^{-2} \Rightarrow x = e^{-2}$. D'où $S = \{e; e^{-2}\}$.

### 10.6.4 Système écrit avec ln

**Exemple :** $\left\{\begin{array}{ll} \ln x + 2\ln y & = 3 \\ -3\ln x + \ln y & = 5 \end{array}\right.$ $\qquad S = \{(e^{-1}; e^{2})\}$

## 10.7 Limites de reférence pour la fonction ln

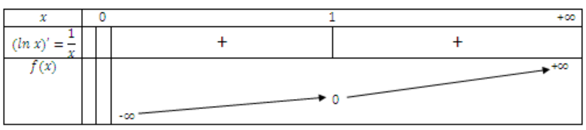
1. $$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$
2. $$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$
3. $$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$
4. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
5. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$
6. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

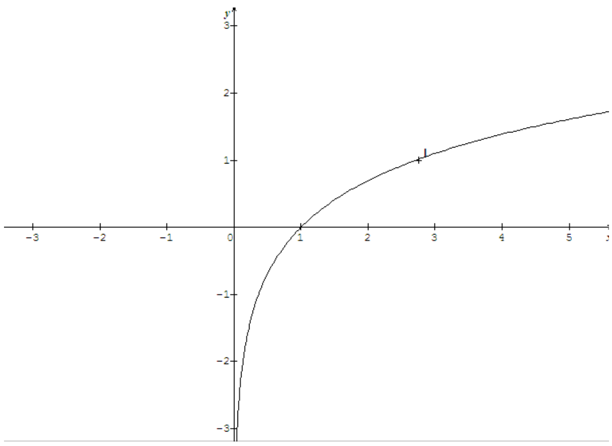
Face à une indétermination , on fait une transformation pour se ramener à l'une de ces limites.
**Exemple :**

1. $$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1)$$
2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\ln x}$$

## 10.8 Etude et représentation graphique de la fonction ln

$D_{\ln} = ]0; +\infty[$.
**Limites aux bornes** :
$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.
**Dérivée** :
ln est dérivable sur $D_{\ln}$. $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$.
**Tableau de variation**




x.png 

$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$ , La fonction $ln$ admet une branche infinie de direction asymptotique l'axe $(OI)$.

## 10.9 Dérivées et primitives des fonctions écrites avec ln.

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $\ln u(x)$ , $u(x) > 0$ | $\frac{u'(x)}{u(x)}$ |
| $\ln \vert u(x)\vert$ | $\frac{u'(x)}{u(x)}$ |

| Fonction | Primitives |
|---|---|
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln \vert u(x)\vert$ |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ et $u(x) > 0$ | $\ln u(x)$ |

**Exemple**

| Fonctions | Dérivée |
|---|---|
| $\ln \vert 5-2x\vert$ | $\frac{-2}{5-2x}$ |
| $\ln \sin x$ | $\frac{\cos x}{\sin x}$ |
| $\ln(x^2+3x+1)$ | $\frac{2x+3}{x^2+3x+1}$ |
| $\ln \vert\frac{x+3}{x-1}\vert$ | $\frac{\frac{-4}{(x-1)^2}}{\frac{x+3}{x-1}}$ |

| Fonctions | Primitives |
|---|---|
| $\frac{2x}{1+x^2}$ | $\ln(x^2+1)$ |
| $\frac{-\sin x}{\cos x}$ | $\ln(\cos x)$ |
| $\frac{3}{x+5}$ | $3\ln\vert x+5\vert$ |
| $\frac{7}{2x-1}$ | $\frac{7}{2}\ln\vert 2x-1\vert$ |

## 10.10 Etude et représentation graphique d'une fonction écrite avec ln.

**Exemple** $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(2-x) \end{array}$

$D_f = ]-\infty, 2[$

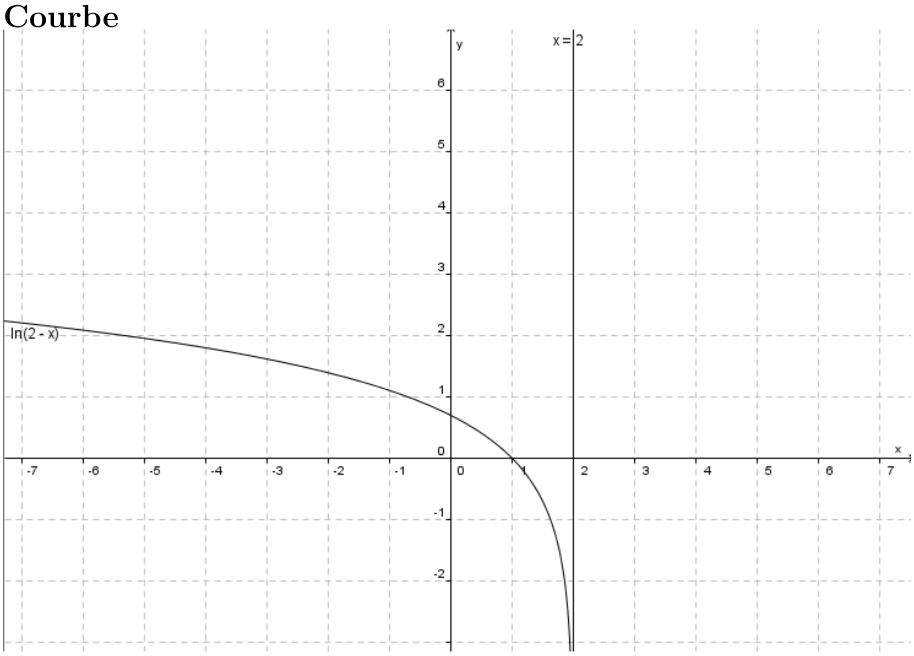
$\lim_{x\to 2} = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} = +\infty$. La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale.

$f'(x) = \frac{-1}{2-x} < 0$.

**tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | $2$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow -\infty$ | |

**Courbe**




**Equation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 1.**

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -x + 1$

## 10.11 Fonction logarithme décimale

C'est la fonction notée $\begin{array}{c} \log :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \end{array}$ Le logarithme décimal ou logarithme de base 10 utilise les propriétés du logarithme népérien.

## 10.12 Fonction logarithme de base $a \in ]0,1[\cup]1,+\infty[$

C'est la fonction notée $\log_a x$ (lire logarithme de base $a$) et définie par : $\begin{array}{c} \log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \end{array}$

**Exemple** : La fonction logarithme de base 4 $\begin{array}{c} \log_4 :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_4 x = \frac{\ln x}{\ln 4} \end{array}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \ln x)$
2. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{\ln x})$
3. $\lim_{x\to0}(\frac{1}{\ln x})$
4. $\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x} - \ln x)$
5. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1-\ln x}{x})$
6. $\lim_{x\to0}(\frac{1-\ln x}{x})$
7. $\lim_{x\to+\infty} x(1 - \ln x)$

Chapitre Onze

# Fonction Exponentielle

## 11.1 Fonction exponentielle népérienne

### 11.1.1 Définition

La fonction exponentielle népérienne est la réciproque de la fonction logarithme népérienne.

On a : $\begin{array}{c} \ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp x = e^x \end{array}$

Par la fonction exponentielle , les images sont données par la touche $e^x$ de la calculatrice.

**Exemple**

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $0$ | $0,5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $exp(x)$ | $0,04$ | $0,13$ | $1$ | $1,64$ | $7,38$ |

### 11.1.2 Propriétés

1. $y \in \mathbb{R}_+^*$ , $x \in \mathbb{R}$ , $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
2. $\ln e^x = x$ ainsi $\ln e^5 = 5$
3. $e^{\ln x} = x$ ainsi $e^{\ln 3} = 3$
4. $e^0 = 1$
5. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
6. $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ainsi $e^{1+\ln x} = e^1 \times e^{\ln x} = e \times x = ex$
7. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ainsi $e^{-1+\ln 2} = e^{-1} \times e^{\ln 2} = \frac{2}{e}$
8. $e^{xy} = (e^x)^y$ ainsi $e^{2\ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$
9. $e^x > 0$

### 11.1.3 Equations et Inéquations écrites avec $e^x$

Leur résolution utilise les propriétés de la fonction exponentielle népérienne et celle de la fonction logarithme népérienne.

**Exemple 1**

Resolvons dans $\mathbb{R}$ chacunes des équations et inéquations suivantes :

$$e^{x+3} = 5 \tag{11.1}$$

$$e^{x-1} = -2 \tag{11.2}$$

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0 \tag{11.3}$$

$$e^{2x} - 3e^x + 2 < 0 \tag{11.4}$$

**Solution 1**

$$e^{x+3} = 5 \Rightarrow \ln e^{x+3} = \ln 5 \Rightarrow x + 3 = \ln 5 \Rightarrow x = -3 + \ln 5$$

$S = \{-3 + \ln 5\}$

**Exemple 2**

Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 3e^x - e^y & = 3 \\ -4e^x + 3e^y & = 1 \end{cases}$ $S = \{\ln 2, \ln 3\}$

**Application :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$

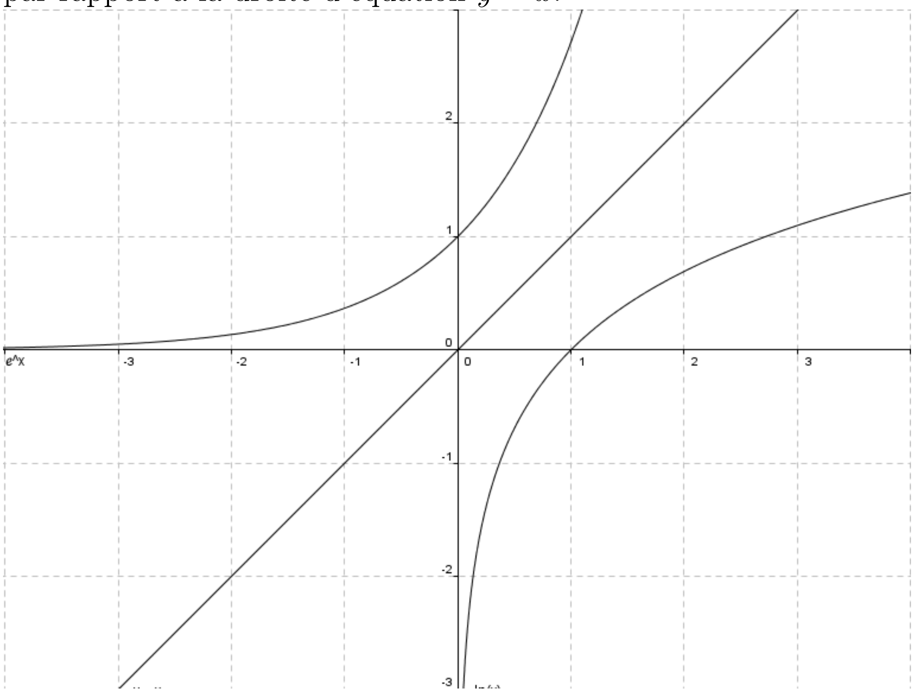
$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \quad (11.5)$$

$$e^x - 5 < -4e^{-x} \quad (11.6)$$

$S_1 = \{0; \ln 4\}$ et $S_2 = ]0; \ln 4[$.

### 11.1.4 Représentation graphique.

La représentation graphique de la fonction ln et celle de sa réciproque exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.




| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $e^x$ | + | |
| $e^x$ | $0 \nearrow$ | $+\infty$ |

### 11.1.5 Limites de réference pour la fonction exp

1. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

**Application** : Calculons

1. $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x) = \lim_{x\to+\infty}[x(\frac{e^x}{x} - 1)] = +\infty$

2. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{e^x}{5x}) = 0$
3. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{5x}) = \frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

### 11.1.6 Dérivées et primitives liées à la fonction exponentielle.

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = e^{u(x)}$ | $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ |

Déterminons $f'(x)$ dans chacun des cas suivant :

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $f(x) = x + e^x$ | $f'(x) = 1 + e^x$ |
| $f(x) = e^{2x+3}$ | $f'(x) = 2e^{2x+3}$ |
| $f(x) = e^{x^3+x^2-5}$ | $f'(x) = (3x^2+2x)e^{x^3+x^2-5}$ |

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x$ |
| $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ | $F(x) = e^{u(x)}$ |
| $f(x) = e^{ax+b}$ | $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ |

Déterminons $F(x)$ dans chacun des cas suivant :

| Fonctions | Primitives |
|---|---|
| $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$ | $F(x) = \ln x + e^x$ |
| $f(x) = 4e^{4x+3}$ | $F(x) = e^{4x+3}$ |
| $f(x) = e^{5x-2}$ | $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x-2}$ |

## 11.2 Fonction exponentielle de base $a \in ]0,1[\cup]1,+\infty[$

C'est la fonction notée $\exp_a$ et définie par : $\begin{array}{l}\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x = e^{x\ln a}\end{array}$

**Exemple** $\begin{array}{l}\exp_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto 3^x = e^{x\ln 3}\end{array}$

$f(x) = e^{x\ln a}$

$f'(x) = (\ln a)e^{x\ln a}$ avec $\ln a \begin{cases} positif \;\; pour \;\; a > 0 \\ negatif \;\; pour \;\; 0 < a < 1 \end{cases}$ Pour $a > 0$ on a $f'(x) > 0$ , $f$ est strictement croissante.
Pour $0 < a < 1$ on a $f'(x) < 0$ , $f$ est strictement décroissante.

**Application :**
Etude et représentation graphique des fonctions $f(x) = (\frac{1}{2})^x = e^{x\ln\frac{1}{2}}$ et $g(x) = (3)^x = e^{x\ln 3}$
Posons $f(x) = (\frac{1}{2})^x = e^{x\ln\frac{1}{2}}$

$D_f = \mathbb{R}$

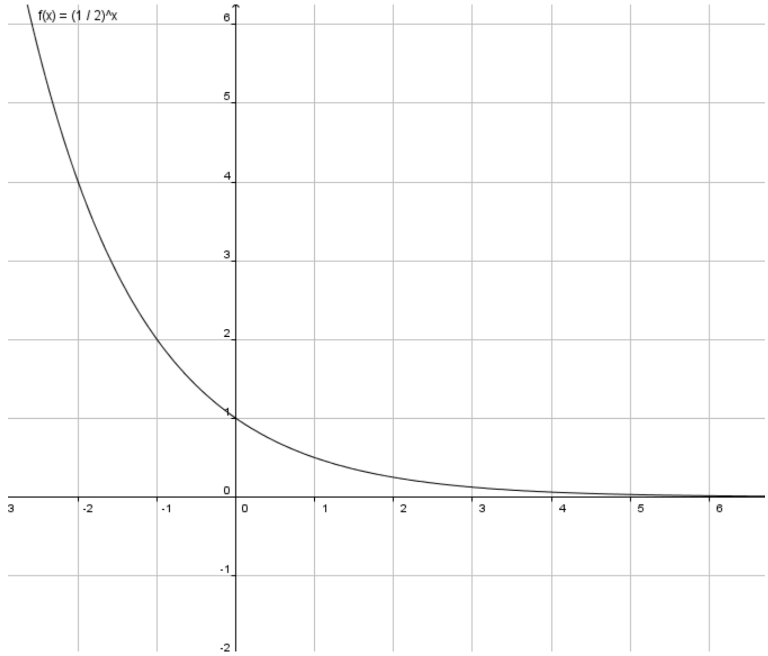
$\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\frac{1}{2}} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{1}{2}} = 0$

$f'(x) = (\ln\frac{1}{2})e^{x\ln\frac{1}{2}} < 0$

Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $ln\frac{1}{2}$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |



f(x) = (1 / 2)^x

# Calcul intégral

## 12.1 Intégrale d'une fonction continue

### 12.1.1 Définition

$f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$. $a$ et $b$ sont des éléments de $I$ tels que $a < b$. $F$ est une primitive de $f$ sur $I$. Le nombre $F(b) - F(a)$ que l'on note $[F(x)]_a^b$ (lire $f(x)$ pris entre $a$ et $b$) ou $\int_a^b f(x)dx$ (lire somme de $a$ à $b$ de $f(x)dx$) est une intégrale.
Donc $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. $x$ est la variable muette de l'intégrale , elle peut être remplacée par une autre lettre.
**Exemple :** Calculons $\int_2^4 (x+3)dx = [F(x)]_2^4 = [\frac{1}{2}x^2 + 3x]_2^4 = [(\frac{1}{2}4^2 + 3(4)) - (\frac{1}{2}2^2 + 3(2))] = 12$
**Application :** Calculer les nombres suivants :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \tag{12.1}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 \tag{12.2}$$

**Remarque :**
Le calcul de

$$K = \int_0^5 \frac{4}{x-1}dx \tag{12.3}$$

est impossible car la fonction $f(x) = \frac{4}{x-1}$ n'est pas continue sur $[0, 5]$

### 12.1.2 Intégrale et primitive

L'intégrale $\int_a^x f(x)dx$ représente la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.
**Exemple :**

$$\int_1^x \frac{1}{x} = [\ln x]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x \tag{12.4}$$

$$G(x) = \int_2^x (2-x^2+x)dx = [2x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2]_2^x = [2x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-(2(2)-\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2)] = 2x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{10}{3} \tag{12.5}$$

### 12.1.3 Intégrale et aire

#### 12.1.3.1 Unité graphique d'aire

L'unité d'aire est l'aire du carré ayant pour côtés $[OI]$ et $[OJ]$. Si l'unité sur les axes est le $cm$ , l' unité d'aire est le $cm^2$. Si l'unité sur les axes est le $m$ alors l' unité d'aire est le $m^2$.

#### 12.1.3.2 Propriétés

$f$ est une fonction continue et positive sur $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limité par $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
**Exemple :** $f(x) = x + 3$
Calculons

$$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x+3)dx = [\frac{1}{2}x^2 + 3x]_0^2 = \frac{1}{2}(2)^2 + 3(2) = 8 \tag{12.6}$$

## 12.2 Propriétés de l'intégrale

1. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \tag{12.7}$$
   car $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$
2. $$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{12.8}$$
   car $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$
3. $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \tag{12.9}$$
   Relation de Chasles car
   $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$
4. $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{12.10}$$
   Propriété de linéarité
5. $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\beta \in \mathbb{R}$
   $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \tag{12.11}$$
6. Si $f$ est continue sur $I$ , $a \in I$ , $b \in I$ et si $f > 0$ alors
   $$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{12.12}$$
7. Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ , $a \in I$ et $b \in I$ et si $f < g$ alors
   $$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \tag{12.13}$$
8. Si $f$ est continue sur $I$ , $a \in I$ , $b \in I$ et s'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que $m < f(x) < M$ alors
   $$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a) \tag{12.14}$$
   $$|f(x)| < M \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx < M(b-a) \tag{12.15}$$

9. Si $f$ est continue sur $I$ , $a \in I$ , $b \in I$,

$$u = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{12.16}$$

est la valeur moyenne de $f$ entre $a$ et $b$.
Soit la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Calculons la valeur moyenne de $f$ entre 0 et 4.

$$u = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (x^2 + 3x - 1)dx = \frac{31}{3} \tag{12.17}$$

## 12.3 Techniques de calcul

### 12.3.1 Utilisation des primitives.

Le calcul intégral peut utiliser les primitives.Dans ce cas on peut consulter le tableau des primitives.
**Exemple :** Calculons

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{x} - \cos x + \frac{1}{\cos^2 x})dx = [\ln x - \sin x + \tan x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -0,37 \tag{12.18}$$

### 12.3.2 Intégrale d'une fonction.

$$I = \int_0^1 (\frac{x^2 + x - 7}{x-2})dx \tag{12.19}$$

$I = \int_0^1 (\frac{x^2+x-7}{x-2})dx = \int_0^1 [(x-3) - \frac{1}{x-2}]dx = [\frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln|x-2|]_0^1 = \frac{7}{2} + \ln 2$

### 12.3.3 Intégrale d'une fonction trigonométrique

Elle peut utiliser le tableau de primitives , la linéarisation ou une simple transformation.
**Exemple :**

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1 + \cos 2x}{2})dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)dx = [\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{2} - 1 \tag{12.20}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x dx = [\frac{\sin^4 x}{4}]_0^{\frac{\pi}{6}} \tag{12.21}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x)\cos x \sin^2 x dx \tag{12.22}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x)dx = [\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}]_0^{\frac{\pi}{4}} \tag{12.23}$$

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^5 x dx = [\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x]_0^{\frac{\pi}{4}} \tag{12.24}$$

Si l'expression $\sin^p x \cos^q x$ est telle que $p$ ou $q$ est impair , le calcul de sa primitive peut éviter la linéarisation.

### 12.3.4 Intégrale d'une fonction paire , impaire , périodique.

1. Si $f$ est paire,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx \tag{12.25}$$

et

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \tag{12.26}$$

**Exemple :**

$$\int_{-3}^{3} x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_{-3}^{3} = 18 \tag{12.27}$$

$$\int_{-3}^{0} x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_{-3}^{0} = 9 \tag{12.28}$$

$$\int_{0}^{3} x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_{0}^{3} = 9 \tag{12.29}$$

$$\int_{-3}^{3} x^2dx = 2\int_{0}^{3} x^2dx \tag{12.30}$$

2. Si $f$ est impaire, alors

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx \tag{12.31}$$

et

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \tag{12.32}$$

3. Si $f$ est périodique de période $T$ alors

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx \tag{12.33}$$

### 12.3.5 Intégration par parties.

$f$ et $g$ sont des fonctions dérivables sur $I$ et ont pour dérivées respectives $f'$ et $g'$. Si $f'$ et $g'$ sont continues sur $I$ et si $a$ et $b$ sont les éléments de $I$ alors on a :

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx \tag{12.34}$$

**Exemple :** Calculons

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x\sin x dx \tag{12.35}$$

Posons $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin x$. $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos x$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{0}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f'(x)g(x)dx \tag{12.36}$$

$$I = [-x\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1)(-\cos x)dx = [-x\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} + [\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \tag{12.37}$$

### 12.3.6 Intégration par changement de variable affine pour calculer $I = \int_a^b (\alpha t + \beta)dt$.

On peut poser $u = \alpha t + \beta$ , $du = \alpha dt \Rightarrow dt = \frac{du}{\alpha}$.
Pour $t = a$ , $u = \alpha a + \beta$ et pour $t = b$ , $u = \alpha b + \beta$

$$I = \int_a^b (\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} u\frac{du}{\alpha} \tag{12.38}$$

Calculons

$$I = \int_0^1 (3x+1)^2 dx \tag{12.39}$$

$$I = \int_0^1 (3x+1)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{3}(3x+1)^2(3)dx = [\frac{1}{9}(3x+1)^3]_0^1 = 7 \tag{12.40}$$

### 12.3.7 Calcul approché d'une intégrale $I' = \int_a^b f(x)dx$.

Quand aucune méthode d'intégration ne convient et que $(C_f)$ est tracée alors l'intervalle $[a,b]$ est partagée en $n$ intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$. Une valeur approchée de $I$ est

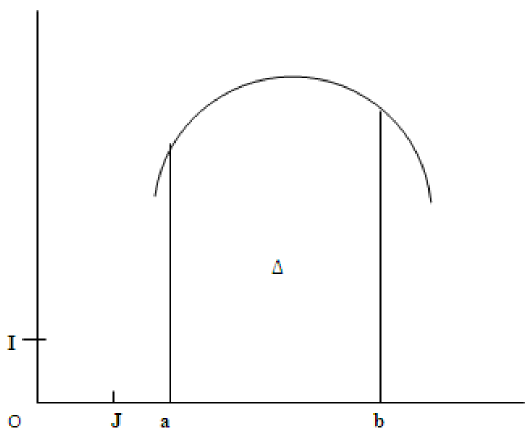
$$I' = \frac{b-a}{n}f(x_0) + \frac{b-a}{n}f(x_1) + \frac{b-a}{n}f(x_2) + ........... + \frac{b-a}{n}f(x_{n-1}) \tag{12.41}$$

$$I' = (\frac{b-a}{n})[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ........ + f(x_{n-1})] \tag{12.42}$$

$$I' = (\frac{b-a}{n})\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \tag{12.43}$$

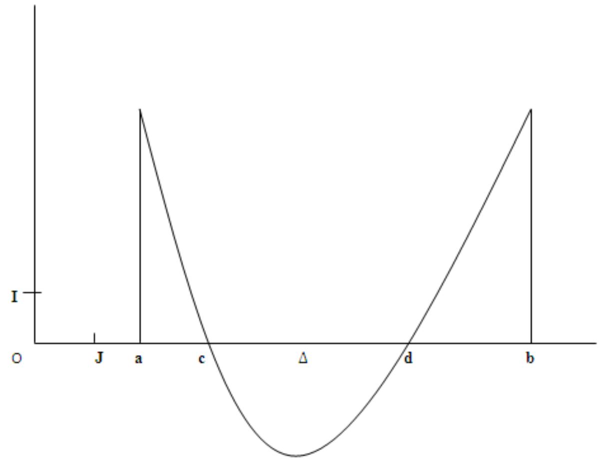
## 12.4 Application du calcul intégral au calcul des aires.

### 12.4.1 Cas où le domaine est limité par $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.




$$Aire(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \tag{12.44}$$

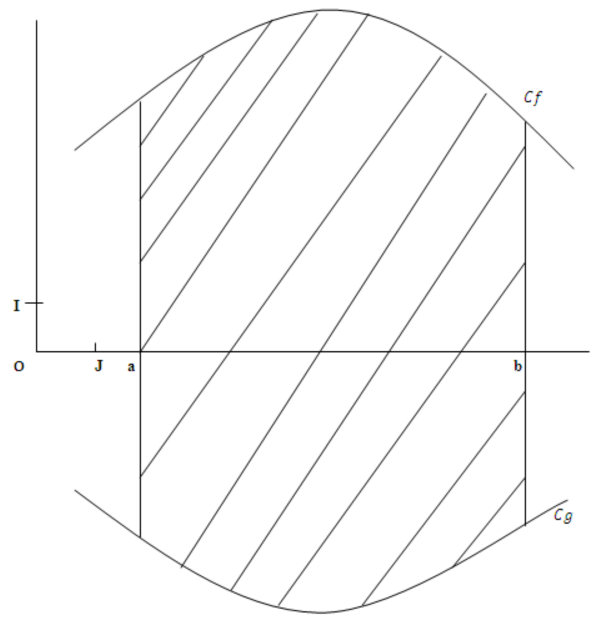
### 12.4.2 Cas où $f$ est alternativement positive et négative entre $a$ et $b$.




$$Aire(\Delta) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \quad (12.45)$$

**Exemple**
$f(x) = -x + 2$
Aire $(\Delta)$= $\int_0^2 (-x+2)dx - \int_2^4 (-x+2)dx = 4\ u.a$

### 12.4.3 Cas où le domaine est limité par la courbe de $f$ , celle de $g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.




$$Aire(\Delta) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad (12.46)$$

# Equations Differentielles

## 13.1 Définition

Une équation differentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction et qui contient l'une des dérivées successives de la fonction.
**Exemple**

$$f + 3f' - 2f'' = 1 \tag{13.1}$$

$$f - 5f' = 2 \tag{13.2}$$

$$y - 4y' + y'' = 0 \tag{13.3}$$

## 13.2 Equation differentielle du type $f' + af = 0$ ou $y' + ay = 0$

On l'appelle équation differentielle linéaire à coefficient constant de premier ordre et sans second membre.
**Exemple**

$$f - 2f' = 0 \tag{13.4}$$

$$4f + 12f' = 0 \tag{13.5}$$

### 13.2.1 Résolution de l'équation differentielle du type $f' + af = 0$

Les solutions sont les fonctions $f_k$ telles que $f_k(x) = ke^{-ax}$ car $f_k'(x) = -ake^{-ax}$ et $f_k'(x) + af_k(x) = -ake^{-ax} + ake^{-ax} = 0$.
**Exemple**

| Equations | Solutions |
|---|---|
| $f' + 2f = 0$ | $f_k(x) = ke^{-2x}$ |
| $f - 2f' = 0$ | $f_k(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$ |
| $4f + 12f' = 0$ | $f_k(x) = ke^{-\frac{1}{3}x}$ |

### 13.2.2 Solution de l'équation differentielle du type $f' + af = 0$ vérifiant les conditions initiales.

**Exemple**
Trouvons la solution de l'équation diferentielle

$$f' + 3f = 0 \tag{13.6}$$

qui verifie $f(0) = 2$.
**Solution générale.**
$f_k(x) = ke^{-3x}$
$f(0) = 2 \Rightarrow ke^{-3(0)} = 2 \Rightarrow k = 2$. La solution cherchée est $f_2(x) = 2e^{-3x}$.

## 13.3 Equation differentielle du type $f'' + af' + bf = 0$ ou $y'' + ay' + by = 0$

On l'appelle équation differentielle linéaire de second ordre à coefficient constant sans second membre.
**Exemple**

$$f'' - 2f' + 3f = 0 \qquad (13.7)$$
$$4f'' - f = 0 \qquad (13.8)$$

### 13.3.1 Equation caractéristique de l'équation differentielle $f'' + af' + bf = 0$.

C'est l'écriture $r^2 + ar + b = 0$.
**Exemple**

$$f'' + f' - 2f = 0 \qquad (13.9)$$

Son équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$
**Application**

| Equation differentielle | Equation caractéristique | Solution de l'équation caractéristique |
|---|---|---|
| $f'' + 2f' - 6f = 0$ | $r^2 - 2r - 6 = 0$ | $r = 2\,;r = -3$ |
| $f'' - 4f = 0$ | $r^2 - 4 = 0$ | $r = -2\,;r = 2$ |
| $f'' - 2f' + f = 0$ | $r^2 - 2r + 1 = 0$ | $r = 1$ |
| $f'' - f' - 2f = 0$ | $r^2 - r - 2 = 0$ | $r = 2\,;r = -1$ |
| $f'' - f' + 5f = 0$ | $r^2 - r + 5 = 0$ | $r = \frac{1-i\sqrt{19}}{2}$ |

### 13.3.2 Résolution de l'équation differentielle $f'' + af' + bf = 0$.

Il y'a trois cas :

1. Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a deux solutions $r_1$ et $r_2$ alors on a
$$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \qquad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}) \qquad (13.10)$$
2. Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a une seule solution $r$ alors on a :
$$f(x) = (Ax + B)e^{rx} \qquad (13.11)$$
3. Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a deux solutions complexes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ alors
$$f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x} \qquad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}) \qquad (13.12)$$

**Exemple** :

| Equation differentielle | Equation caractéristique | Solution de l'équation caractéristique | Solution de l'équation diferentielle |
|---|---|---|---|
| $f'' - f' - 2f = 0$ | $r^2 - r - 2 = 0$ | $r = -1\ ,\ r = 2$ | $f(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$ |
| $f'' - 4f' + 4f = 0$ | $r^2 - 4r + 4 = 0$ | $r = 2$ | $f(x) = (Ax + B)e^{2x}$ |
| $f'' + 9f = 0$ | $r^2 + 9 = 0$ | $r_1 = -3i\ ,\ r_2 = 3i$ | $f(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$ |
| $f'' - 7f' + 10f = 0$ | $r^2 - 7r + 10 = 0$ | $r_1 = 2\ ,\ r_2 = 5$ | $f(x) = Ae^{2x} + Be^{5x}$ |
| $f'' - 6f' + 9f = 0$ | $r^2 - 6r + 9 = 0$ | $r = 3$ | $f(x) = (Ax + B)e^{3x}$ |
| $f'' + 16f = 0$ | $r^2 + 16 = 0$ | $r_1 = -4i\ ,\ r_2 = 4i$ | $f(x) = A\cos 4x + B\sin 4x$ |

### 13.3.3 Solution vérifiant une condition initiale

Trouvons la solution de l'équation

$$f'' + f' - 2f = 0 \tag{13.13}$$

qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
**Solution**
$r^2 + r - 2 = 0 \quad r_1 = -2$ , $r_2 = 1$ d'où $f(x) = Ae^{-2x} + Be^x$.
$f'(x) = -2Ae^{-2x} + Be^x$
$f(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1$
$f'(0) = -1 \Rightarrow -2A + B = -1$ d'où le système d'équations suivant :$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases}$ et on déduit que $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x \tag{13.14}$$

**Application**
Trouvons la solution de l'équation

$$f'' + f' - 12f = 0 \tag{13.15}$$

qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{11}{14}e^{-4x} + \frac{17}{14}e^{3x}$$

Trouvons la solution de l'équation

$$f'' + 25f = 0 \tag{13.16}$$

qui vérifie $f(\pi) = -1$ et $f'(\pi) = 2$.

$$f(x) = \cos 5x - \frac{2}{5}\sin 5x$$

# STATISTIQUES

## 14.1 Série statistique double.

C'est une série statistique à deux caractères.
**Exemple**
On a relevé les notes en mathématiques et en français pour 8 élèves d'une classe de terminale D. Les résultats sont les suivants :

### 14.1.1 Organisation des données.

#### 14.1.1.1 Tableau linéaire des résultats.

| Elèves | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Notes $x_i$ en maths | 4 | 11 | 11 | 6 | 3 | 10 | 8 | 5 |
| Notes $y_i$ en français | 5 | 8 | 8 | 12 | 10 | 7 | 2 | 13 |

#### 14.1.1.2 Tableau à double entrée des résultats.

Posons $E_x = \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 11\}$ et $E_y = \{2, 5, 7, 8, 10, 12, 13\}$.

| $E_x$ \ $E_y$ | 2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Total | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 8 |

### 14.1.2 Séries statistiques marginales associées à une série statistique double.

♣ **Série statistique de caractère $X$.**

| Modalités $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif $n_i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

♣ **Série statistique de caractère $Y$.**

| Modalités $y_i$ | 2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif $n_i$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |

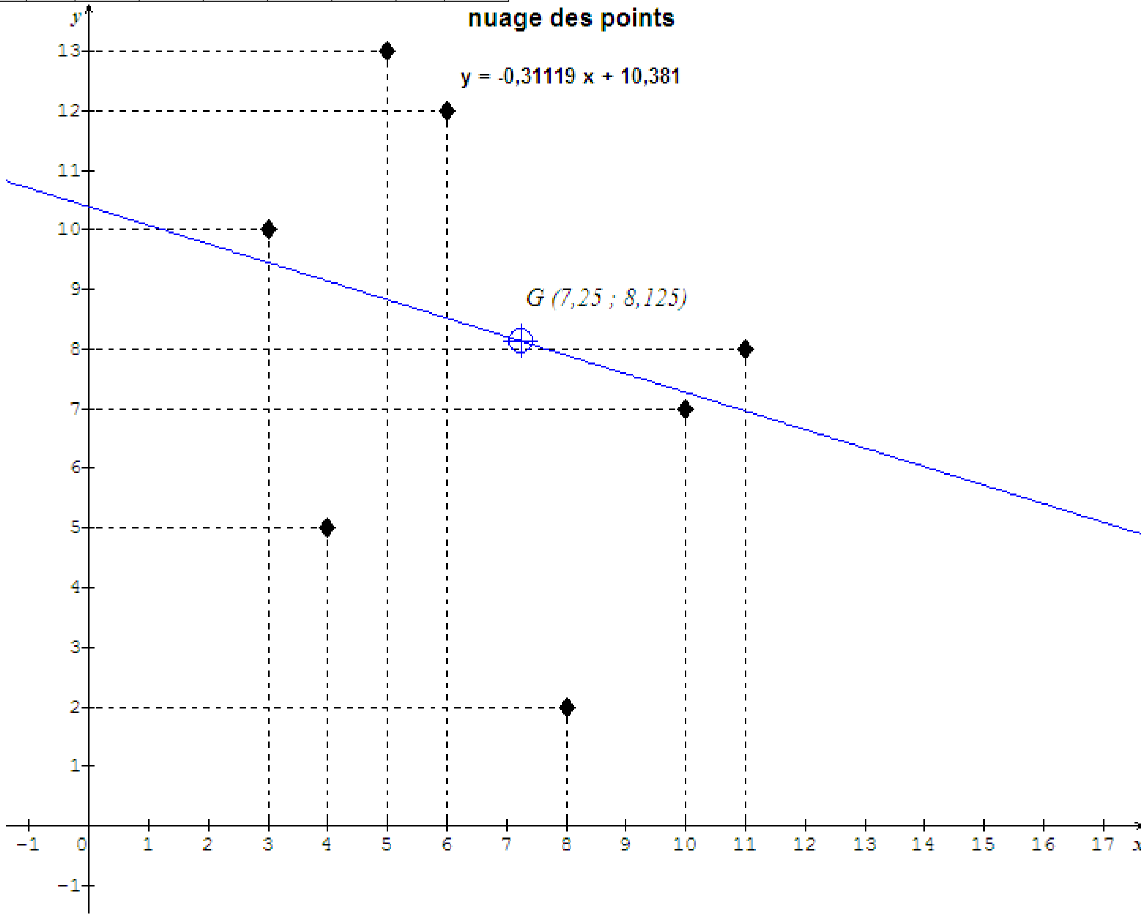
En abrégé , la série statistique de caractère $X$ se note $(x_i, n_i)$ et la série statistique de caractère $Y$ se note $(y_i, n_i)$. La série statistique double se note $(x_i, y_i, n_i)$.

Pour la série $(x_i, n_i)$ la moyenne est $\overline{x} = \frac{11(2)+3(1)+4(1)+5(1)+6(1)+8(1)+10(1)}{8} = 7,25$.
Pour la série $(y_i, n_i)$ la moyenne est $\overline{y} = \frac{2(1)+5(1)+7(1)+8(2)+10(1)+12(1)+13(1)}{8} = 8,125$.

### 14.1.3 Nuages de points associés à une série statistique double $(x_i, y_i, n_i)$.

C'est l'ensemble des points de coordonnées $(x_i, y_i)$. Pour notre exemple on a :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 11 | 11 | 6 | 3 | 10 | 8 | 5 |
| $y_i$ | 5 | 8 | 8 | 12 | 10 | 7 | 2 | 13 |




### 14.1.4 Point moyen d'un nuage

C'est le point $G(\overline{x}, \overline{y})$. Pour notre exemple c'est le point $G(7,25\ ;\ 8,125)$.

## 14.2 Ajustement du nuage des points.

Ajuster un point consiste à déterminer la ligne simple formée par les points du nuage. Quand la ligne simple est une droite , on dit que l'ajustement est linéaire. L'ajustement linéaire utilise deux méthodes :

1. La méthode des moindres carrés.
2. La méthode de Mayer.

### 14.2.1 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

Elle utilise deux droites : La droite de regression de $y$ en $x$ et la droite de regression de $x$ en $y$.

#### 14.2.1.1 Droite de regression de $y$ en $x$.

Elle a pour équation $y = ax + b$. Elle passe par le point moyen $G$. Le réel

$$a = \frac{Cov(x;y)}{V(x)} \tag{14.1}$$

où $V(x)$ est la variance associée à $x$.

$$V(x) = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 \tag{14.2}$$

où $N$ est l'effectif total pour le caractère $x$ et $Cov(x;y)$ est la covariance de la série double.

$$Cov(x;y) = \frac{1}{N}\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{14.3}$$

$$Cov(x;y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{x}.\overline{y} \tag{14.4}$$

Pour notre exemple

| $x_i$ | 4 | 11 | 11 | 6 | 3 | 10 | 8 | 5 | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^2$ | 16 | 121 | 121 | 36 | 9 | 100 | 64 | 25 | 492 |

$V(x) = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{492}{8} - (7,25)^2 = 8,93$

| $x_i$ | 4 | 11 | 11 | 6 | 3 | 10 | 8 | 5 | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5 | 8 | 8 | 12 | 10 | 7 | 2 | 13 | $X$ |
| $x_i y_i$ | 20 | 88 | 88 | 72 | 30 | 70 | 16 | 65 | 449 |

$Cov(x;y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{x}.\overline{y} = \frac{449}{8} - (7,25)(8,12) = -2,74$
$a = \frac{Cov(x;y)}{V(x)} = \frac{-2,74}{8,93} = -0,3$
$y = -0,3x + b$
$\overline{y} = -0,3\overline{x} + b \Rightarrow b = \overline{y} + 0,3\overline{x} = 8,12 + 0,3(7,25) = 10,3$
$y = -0,3x + 10,3$

#### 14.2.1.2 Droite de regression de $x$ en $y$.

Elle a pour équation $x' = a'y + b'$. Elle passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$. On a

$$a' = \frac{Cov(x;y)}{V(y)} \tag{14.5}$$

avec

$$Cov(x;y) = \frac{1}{N}\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{14.6}$$

$$Cov(x;y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{x}.\overline{y} \tag{14.7}$$

et

$$V(y) = \frac{\sum n_i y_i^2}{N} - \overline{y}^2 \tag{14.8}$$

Pour notre exemple , écrivons l'équation de la droite de regression de $x$ en $y$.

| $x_i$ | 4 | 11 | 11 | 6 | 3 | 10 | 8 | 5 | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5 | 8 | 8 | 12 | 10 | 7 | 2 | 13 | $X$ |
| $x_i y_i$ | 20 | 88 | 88 | 72 | 30 | 70 | 16 | 65 | 449 |
| $y_i^2$ | 25 | 64 | 64 | 144 | 100 | 49 | 4 | 169 | 619 |

$Cov(x;y) = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{x}.\overline{y} = \frac{449}{8} - (7,25)(8,12) = -2,74$
$V(y) = \frac{\sum n_i y_i^2}{N} - \overline{y}^2 = \frac{619}{8} - (8,12)^2 = 11,44$
$a' = \frac{Cov(x;y)}{V(y)} = \frac{-2,74}{11,44} = -0,23$
$\overline{x} = a'\overline{y} + b' \Rightarrow b' = \overline{x} - a'y = 7,25 - (-0,23)(8,12) = 9,68$
$x = -0,23y + 9,11$

#### 14.2.1.3 Correlation linéaire entre deux variables statistiques $x$ et $y$.

Deux variables statistiques $x$ et $y$ sont en correlation linéaire quand la courbe de regression de $y$ en $x$ et la courbe de regression de $x$ en $y$ sont des droites. Le réel $r = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{v(x).v(y)}}$ s'appelle **coefficient de correlation linéaire**.
$r^2 = aa'$ avec $a = \frac{cov(x,y)}{v(x)}$ et $a' = \frac{cov(x,y)}{v(y)}$.

**Exemple**

Pour notre exemple $r^2 = aa' = (-0,3)(-0,23) = 0,069$.
$r^2 = 0,07 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0,07} = \pm 0,26$.

**Exemple**

1. $r$ porte le signe de $cov(x, y)$
2. Pour $r^2 = 1$ , les deux droites sont confondues ; l'ajustement est parfait.
3. Pour $|r|$ proche de 1 , on dit qu'il y'a forte correlation. Les deux droites sont proches l'une de l'autre.

### 14.2.2 Ajustement linéaire par la méthode de MAYER.

Il est utilisé pour un nuage constitué de deux parties $E_1$ et $E_2$ d'égal effectif. $G_1$ étant le point moyen de $E_1$ et $G_2$ celui de $E_2$. La droite $(G_1G_2)$ est la droite d'ajustement appellée droite de Mayer.

**Application**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | | 8 | 10 | 12 |
| $y_i$ | 10 | 12 | 8 | | 6 | 2 | 4 |

Ecrivons l'équation de la droite de regression :

$G_1 \begin{cases} x_{G_1} &= \frac{2+4+6}{3} = 4 \\ y_{G_1} &= \frac{10+12+8}{3} = 10 \end{cases}$ $G_2 \begin{cases} x_{G_2} &= \frac{10+12+8}{3} = 10 \\ y_{G_2} &= \frac{2+4+6}{3} = 4 \end{cases}$

$G_1(4; 10)$ ; $G_2(10; 4)$ et la droite qui passe par ces deux points est $y = -x + 14$.

<u>**Point moyen du nuage**</u> $G \begin{cases} x_G &= \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = 7 \\ y_G &= \frac{10+12+8+6+2+4}{6} = 7 \end{cases}$ $G(7; 7)$ et on a $7 = -7 + 14 = 7$ d'où $G$ appartient à la droite.

**Exercice.**

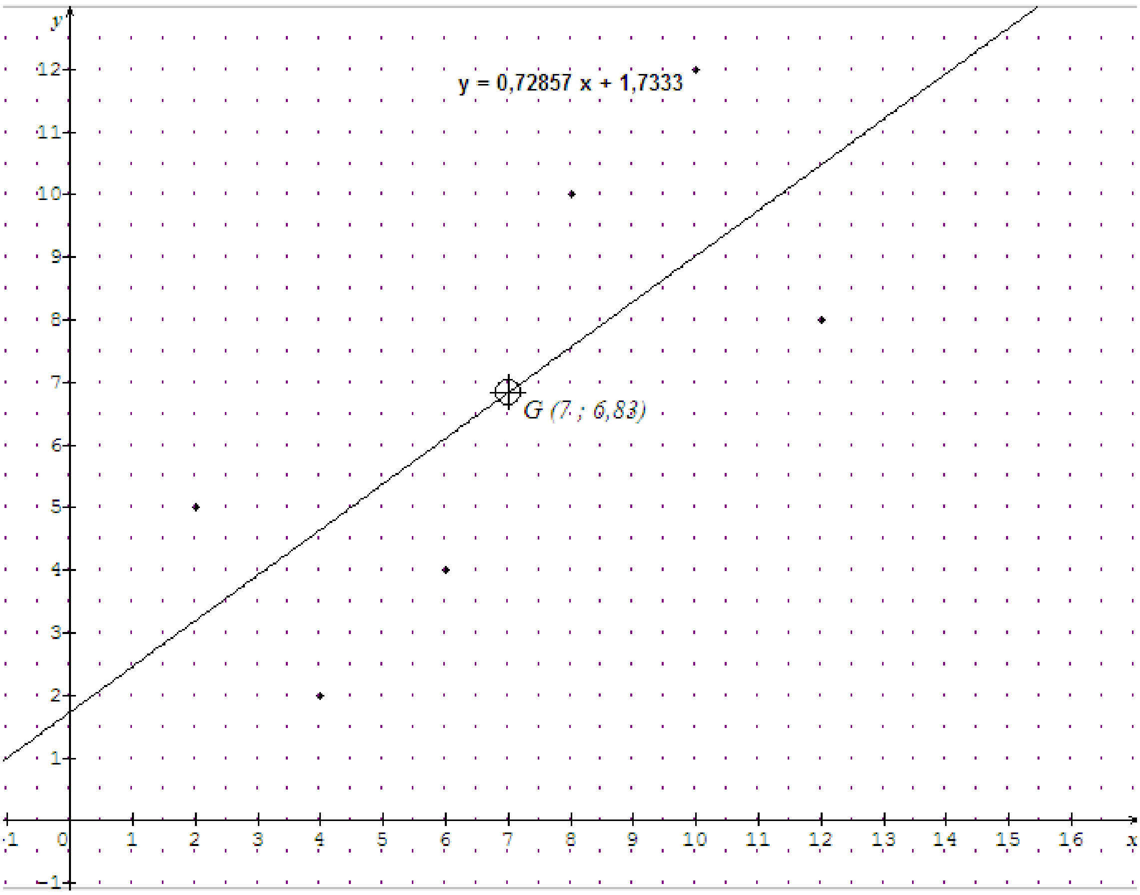
Une série statistique double est définie par le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $y$ | 5 | 2 | 4 | 10 | 12 | 8 |

1. Construire le nuage de points associé à la série.
2. Déterminer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ associées respectivement à $x$ et à $y$.
3. Déterminer le point moyen du nuage.
4. Ecrire l'équation de la droite de regression de $y$ en $x$ et celle de la droite de regression de $x$ en $y$ , puis tracer ces droites.
5. Calculer le coefficient de correlation linéaire entre $x$ et $y$ et interpreter le résultat.

**Solution.**

1. $\overline{x} = \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = 7$
   $\overline{y} = \frac{5+2+4+10+12+8}{6} = 6,83$
2. $G(7; 6,83)$
3. $y = ax + b$ ; $cov(x, y) = 8,52$

4. 

# Probabilité

## 15.1 Quelques rappels sur le dénombrement.

### 15.1.1 Arrangement

Le nombre d'arrangement à $p$ éléments ($p \in \mathbb{N}$) dans un ensemble à $n$ éléments est $A_n^p$.On a :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)......(n-p+1) \tag{15.1}$$

$A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$
**Exemple :**
Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on écrire avec les chiffres 4 , 6 , 7 , 8 , 9.
$n = A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

### 15.1.2 Permutation.

Une permutation d'un ensemble à $n$ éléments est un arrangement des $n$ éléments. Le nombre de permutation des $n$ éléments est $n!$.
**Exemple :**
Le nombre de manière de placer six personnes dans un rang est $n = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

### 15.1.3 Combinaison

Une combinaison à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments est une partie à $p$ éléments. Le nombre de combinaison à $p$ éléments est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{15.2}$$

**Exemple :**
Le nombre de manière de constituer un bureau de 3 personnes dans une classe de 60 élèves est $n = C_{60}^3 = \frac{60!}{3!57!} = \frac{60\times59\times58\times57!}{3\times2\times1\times57!} = \frac{60\times59\times58}{3\times2\times1}$

## 15.2 Vocabulaire des probabilités

### 15.2.1 Epreuve

Une épreuve est une expérience pour laquelle on connait tous les résultats possibles mais dont-on ignore le résultat à obtenir.
**Exemple :**
Lancer un dé dont les faces sont numerotées de 1 à 6 et s'intéresser au chiffre lu à la face supérieure.

### 15.2.2 Univers

C'est l'ensemble des résultats d'une épreuve.On le note $\mathcal{U}$. Dans notre exemple $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'univers est encore appellé **ensemble d'éventualité**.

### 15.2.3 Evènement

C'est un sous ensemble quelconque de l'univers. Pour notre exemple , $A = \{2, 4, 6\}$ ; $B = \{1, 2\}$ ; $C = \{4, 6\}$.

### 15.2.4 Evénement élémentaire.

C'est un événement constitué d'un seul élément. On l'appelle encore un **singleton**. Pour notre exemple les é vénements élémentaires sont $\{1\}$ ; $\{2\}$ ; $\{3\}$ ; $\{4\}$ ; $\{5\}$ ; $\{6\}$.

### 15.2.5 Evénement réalisé.

C'est un événement qui contient le résultat obtenu. Pour notre exemple , si à la fin le résultat est 3 alors $\{2, 3, 4\}$ ; $\{3\}$ ; $\{3, 6\}$ ; $\{3, 5, 1\}$ sont des événements réalisés.

### 15.2.6 Evénement impossible.

C'est un événement jamais réalisé. La partie vide ($\emptyset$) est un événement qui n'est jamais réalisé.

### 15.2.7 Evénement certain.

C'est un événement toujours réalisé. L'univers $\mathcal{U}$ est un événement certain.

### 15.2.8 Evénement contraire de $A$.

On le note $\overline{A}$ (lire non $A$).On l'appelle ainsi le complémentaire de $A$ dans l'univers $\mathcal{U}$.
$A = \{3; 6\}$ $\overline{A} = \{1; 2; 4; 5\}$

### 15.2.9 Evénement $A \cap B$. (A et B)

C'est un évènement qui est réalisé quand A et B sont tous les deux réalisés. Pour notre exemple , "obtenir un nombre pair" $A = \{2, 4, 6\}$ . "Obtenir un multiple de 3" $B = \{3, 6\}$ "Obtenir un nombre pair multiple de 3" $A \cap B = 6$.

### 15.2.10 Evénement $(A \cup B)$. (A ou B)

C'est un événement qui est réalisé quand $A$ et $B$ sont tous les deux réalisés. Pour notre exemple , "obtenir un nombre pair" $A = \{2, 4, 6\}$."obtenir un multiple de 3" $B = \{3, 6\}$."obtenir un nombre pair multiple de 3" $A \cap B = \{6\}$.

### 15.2.11 Evénement $(A \cup B)$. (A ou B)

$A \cup B$ est lié à la phrase "obtenir un nombre pair ou multiple de 3". $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$. L'événement $(A \cup B)$ est réalisé quand un au moins des événements $A$ et $B$ est réalisé.