LYCEE DE NYAMBAKA

Département de Mathématiques

Examen : **Séquence N°4** Session : **2018/2019**

Épreuve : **Mathématiques**

Classe : **TleD** Durée : 4h Coefficient : 4

Vous êtes peut-être un mathématicien si *Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable….. », point à partir du quel vous êtes arrêté,*

EXERCICE 1 : $[3,75\ \boldsymbol{points}]$

I- 1) *Résoudre dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *le système :* $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ *puis en déduire la solution du système :*

$\begin{cases} 2ln(x) + ln(y) = 1 \\ 5ln(x) + 3ln(y) = 4 \end{cases}$ $[\boldsymbol{2\ pts}]$

II- *Soit* g *la fonction définie sur*$]-\infty;\ 0\ [$ *par* $g(x) = \frac{x^2 - x + 4}{-x}$.

1. *Déterminer les réels a, b et c tels que* $g(x) = ax + b - \frac{c}{x}$. $[\boldsymbol{0,75pt}]$
2. *Montrer que la fonction* g *admet des primitives sur l'intervalle* $]-\infty;\ 0\ [$; *En déduire la primitive* G *de* g *sur* $]-\infty;\ 0\ [$ *qui s'annule en* 2. $[\boldsymbol{1pt}]$

EXERCICE 2 : $[\boldsymbol{6\ points}]$

2) *Soit* (U_n) *définie sur IN par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$ *pour tout* $n \in IN$

a) Calculer U_1 *et* U_2 $[\boldsymbol{1pt}]$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $0 < U_n < 3$. $[\boldsymbol{1pt}]$

3) *Soit la suite* (V_n) *définition sur IN par* $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{4}$ $[\boldsymbol{1pt}]$

b) Exprimer V_n, *puis* U_n *en fonction de n.* $[\boldsymbol{1pt}]$

c) Calculer la limite de la suite (U_n). $[\boldsymbol{1pt}]$

4) *On considère la suite* (W_n) *définie par :* $W_n = \frac{3}{U_n}$ *et on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

a) Montrer que r tout $n \in IN$, $W_n = 1 - V_n$. $[\boldsymbol{0,5pt}]$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - (\frac{1}{4})^{n+1}\right)$. $[\boldsymbol{1pt}]$

c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ *quand* $n \to +\infty$ $[\boldsymbol{0,5pt}]$

PROBLEME: [10 *points*]

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B

Partie A : [4 *points*]

Pour chaque question de cet exercice quatre réponses vous sont proposées, mais une seule est juste. Relever sur votre feuille de composition: le numéro de la question suivi de la lettre correspondante à la réponse juste.

1) *L'ensemble de définition de la fonction g définie par :* $g(x)=\ln(-2x+6)$ *est :*

   a) $[3;\ +\infty[$; *b)* $]-\infty;3]$; *c)* $]-\infty;3[$; *d)* $]3;\ +\infty[$

2) *Le nombre réel* e^{2ln3} *est égal à :*

   a) $2ln3$; *b)* 9 ; *c)* $\sqrt{3}$; *d)* $ln3$

3) *Une primitive H de la fonction h définie sur l'intervalle* $\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ ***par*** $h(x)=\dfrac{4}{2x+6}$ *est définie pour tout x de* $\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ ***par*** *:*

   a) $H(x)=2\ln(2x+6)$; *b)* $H(x)=\ln(2x+6)$; *c)* $H(x)=[\ln(2x+6)]^2$; *d)* $H(x)=\frac{1}{2}\ln(2x+6)$

4) *Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative (Cq) de la fonction q définie par :* $q(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ *est :*

   a) $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$; *b)* $y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}$; *c)* $y=\frac{-1}{4}x-\frac{1}{2}$; *d)* $y=\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}$

Partie B : [6 *points*]

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln(x+1)$ *et* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *(a) Calculer les limites aux bornes de* D_f.

   (b) En déduire que (C_f) *admet deux asymptote verticales dont on précisera les équations.*
3. *(a) Calculer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.*

   (b) en déduire que (C_f) *admet deux extrémums en justifiant votre réponse. Préciser tout en justifiant votre réponse si ces extrémums sont des maximums ou des minimums.*
4. *Déterminer les équations des tangentes à* (C_f) *aux points d'abscisses respectives* $x_0=-\frac{1}{2}$ *et* $x_0 = 1$.
5. *Tracer les asymptotes, les tangentes puis construire la courbe* (C_f).
6. *Résoudre graphiquement l'inéquation* $f(x) \leq 0$

Examinateur : Alex Manga « La colère du cafard augmente l'appétit de la poule »