EXAMEN BLANC

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 h **Coefficient : 7.**

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z on associe le point M_1, symétrique de M par rapport à l'axe $(x'Ox)$, puis le point M_2 image de m_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ puis le point m' image de M_2 par la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

1. Déterminer en fonction de z les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2. 0,5 pt
2. Montrer que l'affixe z' de M' vérifie $z' = i\bar{z} + 1 - i$. 0,5 pt
3. Montrer que le quotient $\dfrac{z' - z}{1 + i}$ est un imaginaire pur ou nul. 0,5 pt
4. On note f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M'. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points invariants par f. 0,5 pt
5. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à $(\mathcal{D})$. 0,5 pt
6. Exprimer en fonction de z, l'affixe du milieu I du segment $[MM']$ et montrer que I appartient à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x - y - 1 = 0$. 1 pt
7. Quelle est la nature de l'application ? 0,5 pt
8. Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Quelle est la nature de la transformation $t_{\vec{w}} \circ f$? 1 pt

Exercice 2 (3 points)

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que les points $M_n(x_n, y_n)$ sont sur la droite $(D) : 2x - y - 5 = 0$. 0,5 pt
2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n. 0,25 pt
3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs. 0,5 pt
4. Soit n un entier naturel.
   a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5. 0,5 pt
   b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5 alors ils sont premiers entre eux. 0,25 pt
5. a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^{n+1} + 1$. 0,25 pt
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}. 0,5 pt
   c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5. 0,25 pt

Exercice 3 (2 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, P un plan, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E et $B' = (\vec{i'}, \vec{j'})$ une base de P. On considère l'application linéaire f telle que :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & P \\ \vec{u}(x, y, z) & \longmapsto & \vec{u'}(x', y') \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y + z \end{cases}$$

a) Déterminer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$. 0,75 pt

b) Préciser la matrice de f relative à B et B'. 0,25 pt

c) Déterminer le noyau et l'image de f. (0,5 + 0,5)pt

Exercice 4 (5,5 points)

I/ On appelle (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$ où y est une fonction d'une variable numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les nombres réels r tel que la fonction h définie par $h(x) = e^{rx}$, soit solution de (E). 0,5 pt
2. Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$ où α et β sont deux réels, sont solutions de (E). 0,25 pt

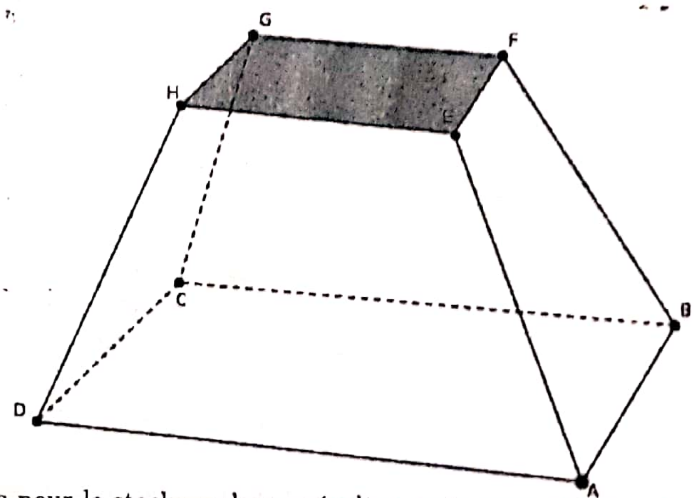
On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).

3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2, \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$. 0,25 pt

II/ On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit μ un nombre réel. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \mu$ est équivalent à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$. 0,5 pt
En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ. 1 pt
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. 0,5 pt
3. Calculer $f'(x)$ et déduire le sens de variation de f. 0,5 pt
4. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse O. 0,25 pt
5. En étudiant le signe de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - x$. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T). 0,75 pt
6. Représenter $(\mathcal{C})$ et (T). Unité graphique 2cm. 0,5 pt.
Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $x < y \leq f(x)$.
Calculer en cm^2 l'aire de D.

Compétence (4,5 points)



Situation :

La société **Green Planet** fait dans la culture du maïs bio et sa transformation en farine. Pour diversifier ses activités, elle envisage se lancer dans l'élevage des poissons tilapia et ceci par la création d'un étang. L'étang en question a la forme d'un triangle PQR, où $P(1+2i)$; $Q(2+i)$ et $R(4+3i)$ dans un repère orthonormé direct où l'unité sur les axes est 1 hm(1hectomètre). Dans cet, on introduira 4 alevins de tilapia au mètre carré.

La société **Green Planet** ayant connu des difficultés pour le stockage de ses récoltes, opte pour se construire un entrepôt pouvant contenir au moins 250 m^3 de farine de maïs. L'ingénieur **Bita** approché pour la réalisation de l'entrepôt propose une structure en forme de tronc de pyramide ABCDEFGH (voir figure ci-dessus) où $A(0, 3, 0)$, $B(-4, 4, 0)$, $C(-4, -1, 0)$, $D(0, -3, 0)$, $E(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $F(-2, 2, \frac{5}{2})$, $G(-2, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ et $H(0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ dans un repère orthonormé direct de l'espace où l'unité sur chaque axe est 1,5 m.

Green Planet a des employés très ardus au travail. Pour les motiver, une prime de 7 500 fcfa devra être allouée à chaque employé femme et de 7 000 fcfa pour chaque employé homme. Le comptable de la société aimerait déterminer le budget mensuel pour la paie de ces primes. Il se rend chez le Directeur des ressources humaines qui déclare que la taille moyenne des employés est 167 cm, la taille moyenne des employés femmes est 160 cm, la taille moyenne des employés hommes est 173,5 cm et l'effectif des employés de cette entreprise est compris entre compris entre 50 et 60.

Tâches :

1. Combien d'alevins devra-t-on introduire dans l'étang ? 1,5 pt
2. La structure de l'entrepôt proposé par **Bita** peut-elle contenir au moins 250 m^3 de farine de maïs ? 1,5 pt
3. Quel montant mensuel doit prévoir le comptable de **Green Planet** pour les primes des employés ? 1,5 pt