Examen	Epreuve	Coef	Durée	Classe	Année Scolaire
Evaluation 1	Mathématiques	07	3h	$T^{le}C$	2020/2021

La présentation et le soin apporté à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

15,5pts

PARTIE A : Utilisation des ressources

Exercice 1 **ROC et questions de cours (6points)**

1) a) Enonce le théorème de Bézout. **0.5pt**

b) Montre que quel que soit l'entier naturel *n*, les nombres $a = 9n + 5$ et $b = 7n + 4$ sont premiers entre eux. **0.5pt**

2) a) Enonce le théorème de Gauss. **0.5pt**

b) Trouve tous les couples entiers naturels $(x; y)$ tels que : $3(x-1) = 5y$. **1pt**

3) a) Enonce le corollaire du théorème de Bézout. **0.5pt**

b) En justifiant, dis si les L'équation suivantes admettent des solutions entières :

$(E_1) : 5x + 7y = 4$ et $(E_2) : 9x - 6y = 2$. **0,5pt**

4) a) Énonce le critère d'arrêt pour savoir si un nombre est premier ou non. **1pt**

b) Application : Démontre que 317 est premier. On se justifiera. **0,5pt**

5) Déterminer le nombre de diviseurs de 792. On énoncera la propriété utilisée. **0,5pt**

6) Si l'on divise un nombre *A* par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de *A* par 18? **0,5pt**

Exercice 2 **suites numériques (6,5points)**

A) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

1) Montre que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorées par 2. **1pt**

2) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$ (1). **0,5pt**

3) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$. **0,5pt**

4) Monter que (v_n) est croissante et (u_n) décroissante. **1pt**

5) a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leq 1$. **0,5pt**

b)En déduis que $(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$ (2). **0,25pt**

7) a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$. (on pourra utiliser (1) et (2)) **0,5pt**

b) En déduis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$. **0,5pt**

8) Montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donne leur limite commune l. **0,5pt**

B) Démontre sans calculer la limite, que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{2n}{n+1}$ converge 2. On énoncera la propriété utilisée. **0,75pt**

Exercice 3 **Numération-Congruence-Divisibilité (3points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E): x^2 - 4y^2 = 28$. **0,5pt**

2) Déterminer les entiers n tels que $2n + 1$ divise $n - 3$. **0,5pt**

3) Détermine suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 13^n par 5. 0,75pt

4) Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque

a) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11. 0,5pt

b) Quel est le nombre d'éléments de (E)? 0,25pt

5) Soit $N = \overline{1010111}^{\,2}$.

Montre que le reste de la division euclidienne de N par 2^3 est égale à $\overline{111}^{\,2}$. 0,5pt

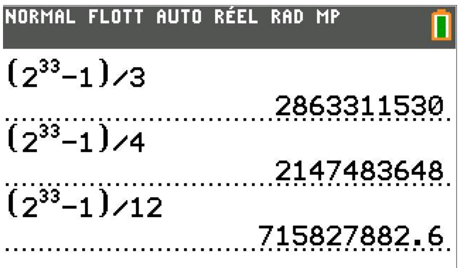
PARTIE B : Palier de compétence

4,5pts

Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux propriétés de Gauss et la congruence pour résoudre un problème de divisibilité.

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelés nombres de Mersenne. Lors d'un exposé de mathématique annuel, un groupe d'élève s'intéresse au nombre de Mersenne : $2^{33} - 1$.

L'un de ces élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats suivants :



Il affirme alors que 3 et 4 divise $2^{33} - 1$ mais pas 12.

Tâches :

1. **En quoi cette affirmation contredit le corollaire du théorème de Gauss.** 1,5pt
2. **Montre que ni 3 ni 4 ne divisent $2^{33} - 1$.** . 1,5pt
3. **Montre que 7 divise $2^{33} - 1$.** 1,5pt

Sénèque a dit : « Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas les faire, c'est parce que nous n'osons pas les faire qu'elles sont difficiles. »