Année Scolaire 2020/2021	COLLEGE HENRI DUMONT			
Devoir Surveillé N°3_Du 12/12/2020		Classe	Terminale C	
Départ MATHEMATIQUES	Coef	7	Durée : 4h00min	

Evaluations des Ressources / 15,5points

<u>Exercice 1</u> : 3,5points

A/Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct (o, u, v). A tout point M d'affixe z on associe le plan M' d'affixe z' telle que $Z' = \bar{Z}^2 + Z\bar{Z}$

1) Les coordonnées de M' en fonction de z et de $\bar{z}$ donne : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(z-\bar{z})^2 \\ y' = \frac{1}{2}(z^2-\bar{z}^2) \end{cases}$. **0,5pt**
2) Pour tout nombre complexe z non réel, $z' = 2\bar{z}Re(z)$. **0,5pt**
3) Si on pose $z = re^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$; $z' = 2ir^2e^{i\theta}\sin\theta$. **0,5pt**

B/On considère les nombres complexes : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $et\ u = 1 + j$

1) Etablir que $1 + j + j^2 = 0\ et\ j^3 = 1$ **0,5pt**
2) Démontrer par récurrence que $u^{2n+1} = -j^{n+2}$ **0,75pt**
3) Pour tout entier naturel , exprimer u^{2n} en fonction de $n\ et\ j$ **0,25pt**
4) Calculer $u^{24}\ et\ u^{31}$ **0,5pt**

<u>Exercice 2</u> : 5points

A/ Soient deux sous-ensembles de IR^3, $E = \{(x,y,z) \in IR^3; x + y - z = 0\ et\ x - y - z = 0\}\ et\ F = \{(x,y,z) \in IR^3; x + y - 2z = 0\}$. On admettra que F est un sous-espace vectoriel de IR^3. Soient $\vec{e}_1 = (1,0,1), \vec{e}_2 = (1,1,1) et\ \vec{e}_3 = (0,2,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de IR^3. **0,5pt**
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.**0,5pt**
3. Montrer que $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une base de F. **0,5pt**
4. Montrer que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une famille libre de IR^3. **0,5pt**
5. A-t-on $E \oplus F = IR^3$? **0,5pt**
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. **0,75pt**

B/ On considère l'application $f: IR^2 \to IR^2$ définie par : $f(x,y) = (x - y\ ;\ -3x + 3y)$

1. Montrer que f est une application linéaire. **0,5pt**
2. Montrer que f est ni injective ni surjective. **0,5pt**
3. Donner une base de son noyau et une base de son image. **0,75pt**

<u>Exercice 3</u>: Etude d'une fonction a variable réelle /7points

I/Soit la fonction f définie sur $]-1,1[\ par: \boldsymbol{f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

1. Étudier les variations de f. **1pt**
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,1[$, une solution unique α et que $\alpha > \frac{4}{5}$. **0,75pt**
3. En déduire le signe de $f(x) - x$. **0,5pt**

4. Montrer que f réalise une bijection de $]-1{,}1[$ sur IR. **0,25pt**
5. Montrer que pour tout x de IR on a : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$. **0,5pt**

II/Soit la suite u définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = [0, \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout n de IN, $0 \leq u_n \leq \alpha$. **0,25pt**
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante. Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite. **0,75pt**
3. Montrer que pour tout $x \in IR_+$on a : $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$. **0,5pt**
4. Montrer que pour tout n de IN on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$. **0,5pt**
5. Déduire que $\forall n \in IN$ on a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. **0,75pt**

III/Soit la fonction ψ définie sur $]-1{,}1[\ par: \psi(x) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

1. Montrer que pour tout x de $]-1{,}1[\ par: \psi(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. **0,5pt**
2. Montrer que ψ établit une bijection de $]-1{,}1[$ sur IR. **0,25pt**
3. Montrer que ψ^{-1} est dérivable sur IR et que $(\psi^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$. **0,5pt**

Exercice 4 : Evaluations des compétences / 4,5points

En Octobre 2006, l'école polytechnique de Yaoundé, à son ouverture avait une population de 100 étudiants (élèves ingénieurs). Un bureau d'études de la place en évaluant ses programmes et le système qui sera appliqué (LMD : Licence, Master, Doctorat), prévoit qu'à partir de la rentrée académique 2006 :

- Le nombre d'étudiants augmente chaque année de 10% du fait d'ouverture des nouvelles filières de spécialisation et des différents niveaux d'accès à Polytechnique de Yaoundé (bac et licence) ;
- Du fait des mouvements migratoires (évolution d'un niveau à l'autre, changement d'établissement généralement pour l'étranger, les démissions, les décès et les exclusions), 200 places seront disponibles chaque année dans cette école jusqu'à nouvel avis.

Pour des besoins de construction des locaux et de leurs extensions la modélisation numérique suivante est adoptée. Pour tout entier naturel n, on note Un le nombre d'étudiants de cette école en octobre de l'année 2006 + n. Ainsi, U_0= 100. Pour tout entier naturel n, on pose Vn = Un+ 2000.

En cas d'admission au concours, chaque élève ingénieur possède une carte magnétique donnant accès à l'établissement. L'étudiant DJIOKEN OSEE inscrit dans cette faculté possède une carte magnétique d'accès donc le code est un nombre de trois chiffres s'écrivant $\overline{xyz}$ dans le système décimal et solution du système $\begin{cases} xy + xz + yz = xyz \\ 0 < x < y < z \end{cases}$

Tache1 : Peut-on avoir un effectif stable dans cette école ? **2pts**

Tache 2 : Quel sera le nombre d'ingénieur en octobre 2035 ? **1pt**

Tache 3 : Déterminer le code de Sécurité de la carte magnétique donc possède l'étudiant DJIOKEN OSEE. **1,5pt**