MINESEC 2020/2021 **NIVEAU : Tle C**

LYCEE BILINGUE DE NJOMBE **COEF : 7**

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES **DUREE : 4 H**

EVALUATION DE MATHEMATIQUES COMPTANT POUR LA 3ème SEQUENCE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES **15,5 POINTS**

EXERCICE I : 04,5 points

I- 1) Résoudre dans C l'équation (E_1) :$z^2-2zcos\alpha+1=0$ où α est un paramètre réel 0,5pt

2) Donner la formule trigonométrique des solutions de l'équation (E_n) :$z^{2n}-2z^n cos\alpha+1=0$ où $n \in N^*$ 1pt

II- Soit $P_\alpha(z)=z^{2n}-2z^n cos\alpha+1$

1) Montrer que $P_\alpha(z)=\prod_{k=0}^{n-1}[z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1]$ 0,75pt

2) a- Calculer $P_\alpha(1)$ 0,25pt

b- En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}{4^{n-1}}$ 0,75pt

3) pour tout $\alpha \in ¿0;\pi¿$et pour tout entier naturel n≥ 2, on pose :

$H_n(\alpha)=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$

a- Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$ 0,75pt

b- Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ? 0,5pt

EXERCICE II : 05,5 points

On considère la fonction $f$définie par : $\begin{cases} f(x)=|xlnx| \; si\, x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

A- 1) Etudier f et construire sa courbe représentative (C_f) unité 3cm
2pts

2) Construire la droite $(D): y=x$ et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et (D) 0,5p

3) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=\frac{1}{e}$ avec $\alpha \in ¿1;e¿$
0,75pt

B- on considère la suite (u_n)définie par : $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) Quels sont les valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est constante ? 0,5pt
2) Soit $u_0 \in ¿0;\frac{1}{e}¿$ Montrer que $\forall n \in N, 0<u_n<\frac{1}{e}$ 1pt
3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite 0,75pt

EXERCICE III : Des nombres étranges ! 0,5 points

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres appelés **rep-units** (répétition de l'unité) : ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1.

Soit k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres. Ainsi N_2 =11 ;

1) Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition en facteurs premiers d'un rep-unit. Justifier votre réponse.
0,5pt
2) Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3 , N_4 et N_5.
0,75pt
3) Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.
a- Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.
0,5pt
b- Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme 10m+1 ou 10m-1.
0,5pt
c- En déduire que $n^2 \equiv 1[20]$.
0,5pt
4) a- Soit k>2. Quel est le reste de la division de N_k par 20?
0,25pt
b- En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré. 0,25pt
5) Montrer que $N_k = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10^0$ 0,25pt
6) Prouver que $N_k = \frac{10^k - 1}{9}$. Peut-on etre certain que 10^k est divisible par 9 ?
0,5pt
7) On se propose de démontrer que si k n'est pas premier, alors N_k n'est pas premier.
Rappel : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$
a- On suppose que k est pair et on pose k=2q, où q est un entier plus grand que 1.
Montrer que N_k est divisible par N_2=11 0,5pt
b- On suppose que k est multiple de 3 et on pose k=3q, où q est un entier plus grand que 1.
Montrer que N_k est divisible par N_3=111 0,5pt
c- On suppose k non premier et on pose k=pq , où p et q sont des entiers plus grand que 1.
En déduire que N_k est divisible par N_p. 0,5pt
8) Donner une condition nécessaire pour que N_k soit premier. Cette condition est telle suffisante ?
0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Cet exercice concerne le cryptage de données dans le système RSA

Une personne A choisit deux nombres p et q, puis calcule les produits N= pq et n= (p-1)(q-1). Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

La personne A publie le couple (N ;c), qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et N-1. Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b de la division euclidienne de par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

Pour décrypter les messages recu, la personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant la condition $0 \leq d < n$ et $cd \equiv 1[n]$. Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, à elle et elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair (c'est-à-dire avant le cryptage) est le nombre a.

ici, nous prendrons **p=5, q=11 et c=23.**

1) Un émetteur envoie à A le nombre a= 8. Quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ? 1,5pt

2) La personne A reçoit le message crypté b= 6. Quel est le nombre a envoyé ? 1,5pt

3) Un émetteur envoie à A le nombre a= 1. Quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ? 1,5pt

Que peut – on faire quand on ne sait rien ?… RIEN !! !

Conçu et proposé par PAA OUM