LYCEE BILINGUE DE NJOMBE DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES Examinateur : Mr NGAKOUE	**EVALUTION N°3** ANNEE SCOLAIRE 2020-2021	DUREE :4 HEURES CLASSE : Tle D COEF : 4

A-

EVALUATION DES RESSOURCES : (15,5pts)

EXERCICE : 1 3.5pts

1. Résoudre dans C l'équation $z^2 -2z + 2=0$ **0.5pt**

2. Soient K, L et M les points d'affixes respectives : $z_K=1+i$; $z_L= 1-i$; $z_M= - i\sqrt{3}$

Placé ces points dans le plans P muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$;

Unité graphique : 4 cm. (On ne donnera pas une construction graphique de M) **0.5pt**

3. a) Soit N le symétrique de M par rapport à L. Démontrer que $z_N = 2 + i(\sqrt{3}-2)$ **0.5pt**

b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M en A et N en le point C.

Déterminer les affixes respectives z_A et z_c des points A et C. **0.5pt**

c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2i transforme M en D et N en B.

Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B. **0.5pt**

4. a) Démontrer que K est le milieu des segments [DB] et [AC]. **0.5pt**

b) Calculer $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$, puis en déduire la nature du quadrilatère ABCD **0.5pt**

EXERCICE 2 5pts

I – 1. Résoudre dans C l'équation :

$9Z^2- 6Z + 2=0.$ **0.5pt**

On désigne par u et $v$les deux solutions de l'équation, $u$étant la solution dont la partie imaginaire est positive.

2. Ecrire $u$et v sous forme trigonométrique. **0.5pt**

II. Soit la suite (M_n) de point M_n du plan complexe d'affixe z_n telle que :$z_o= 1$ et pour tout entier

n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{3}Zn$

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n=\arg(z_n)$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. **0.5pt**

b) Exprimer u_n en fonction de$n$. **0.5pt**

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n=|z_n|$.

a) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **0.5pt**

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n. **0.5pt**

3. Déduire de ce qui précède l'expression de Z_n en fonction de n. **0.5pt**

4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n :

a) Z_n est –il réel ? Déterminer alors Z_n . **0.5pt**

b) Z_n est –il imaginaire pur ? **0.5pt**

5. Pour tout entier naturel n, calculer $W_n = |Z_{n+1}-Z_n|$ en fonction de n **0.5pt**

On remarquera que la suite (W_n) est une suite géométrique.

EXERCICE 3 : 3.5pts

La suite (U_n) vérifie, pour tout nombre entier naturel n, la relation :

$U_n +1= \sqrt{2+Un}$

1°Soit f la fonction définie sur [-2 ; + ∞ [par : $f(x) = \sqrt{2+x}$

Tracez la courbe (C) représentative de la fonction f. **0.5pt**

2° On suppose que $U_0=0$

a) Représentez graphiquement les trois premiers termes de (U_n). **0.25pt**

b) Conjecturez à partir du graphique le sens de variation de (U_n) **0.25pt**

3°a) En utilisant le sens de variation de f et un raisonnement par récurrence, montrez que, pour tout n de N, $U_n+1 > Un$ **0.5pt**

b) En procédant de la même façon, montrez que $\forall n \in N, 0 \le U_n < 2$ **0.5pt**

4° On se propose de montrer que la suite (U_n) converge vers le nombre 2.

a) Exprimez $U_{n+1}-2$ en fonction de U_n **0.25pt**

b) En utilisant l'encadrement de Un montrez que $|U_{n+1}-2| ¿ \frac{1}{2} |U_n-2|$ **0.5pt**

c) Déduisez en que $|U_n-2| < |U_0-2|\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **0.5pt**

d) Concluez en déterminant la limite de (U_n) **0.25pt**

PROBLEME **5pts**

On considère la fonction f définie sur R par :

$f(x)= \frac{x^3+1}{x^2+1}$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2cm)

PARTIE A

Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur R par :

$g(x)= x^3 +3x-2$

1) Dresser le tableau de variation de g. **0.5pt**

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) =0$. Vérifié que $0,59 ¿ \alpha < ¿ 0,60$ **0.5pt**

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0.5pt**

PARTIE B

Etude de la fonction f

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition

2) Montrer que pour tout réel x,

$f'(x ¿ = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ **0.25pt**

3) Etudier le sens de variation de la fonction f **0.5pt**

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f. **0.5pt**

5) Montrer que pour tout réel x

$f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$ **0.25pt**

6) En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique D aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$ **0.25pt**

7) Etudier la position de la courbe C par rapport à D **0.5pt**

8) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1. **0.25pt**

9) Tracer les droites D et T ainsi que la courbe C. **0.5pt**

B : <u>EVALUATION DES COMPETENCES</u> (3pts)

Dans tout cet exercice le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

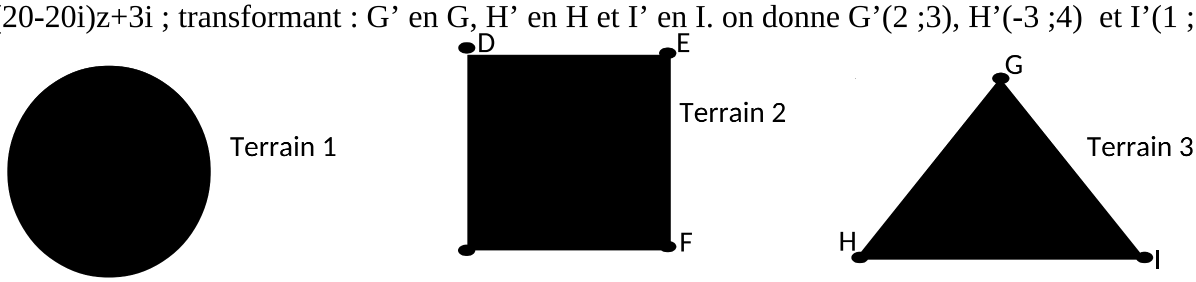
Mr. LAMBDA possède trois parcelles de terrains comme l'indique les figures ci –dessous. Il aimerait mettre tout autour de ses parcelles des fils barbelés de protection coutant 1750Frs le mètre.

Le terrain 1 est l'image de l'ensemble des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient :

$x^2+y^2-2x-99= 0$ par l'homothétie de centre A(2 ;-3) et de rapport K=9.

Le terrain 2 est l'image du carré direct A'B'C'D' par le rotation r de centre A' transformant B' en C tels que r(A') = D, r(B') = C , r (C') =F et r(D') =E. on donne A'(-3 ;3), B'(-3 ;-3) et C'(3 ;-3).

Le terrain 3 est l'image du triangle G''H'I' par la similitude directe ayant pour écriture complexe z' = (20-20i)z+3i ; transformant : G' en G, H' en H et I' en I. on donne G'(2 ;3), H'(-3 ;4) et I'(1 ;5)



Combien dépensera Mr. LAMBDA pour l'achat de fils barbelés pour:

Tâche 1 : entourer Le terrain 1 1pt

Tâche 2 : entourer le terrain 2 1pt

Tâche 3 : entourer le terrain 3 1pt