

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15pts)

EXERCICE 1 : (5pts)

- 1) Soit a un entier relatif. Démontrer que le nombre entier a^2 est paire si et seulement si l'entier a est paire. **1pt**
- 2) Déterminer les diviseurs de 25 et en déduire la solution dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $x^2 - y^2 = 25$. **1pt**
- 3) Soient a et b deux entiers naturels. Démontrer que si 3 divise $a^3 + b^3$, alors 3 divise $(a + b)^3$. **1pt**
- 4) Déterminer le reste de la division euclidienne de $50^{100} + 100^{100}$ par 7. **1pt**
- 5) Trouver l'ensemble des entiers naturels tels que l'entier $n^3 - 3n^2 - 2$ soit divisible par 7. **1pt**

EXERCICE 2 : (5pts)

- 1) Démontrer que $(1 + i)^{2020}$ est un nombre réel. **1pt**
- 2) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$. **0,5pt**
- 3) Soit $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
Déterminer le module et un argument de z^2 , puis en déduire le module et un argument de z . **1pt**
- 4) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z+i}{z-1}$ soit un nombre complexe imaginaire pure. **1pt**
- 5) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées du nombre complexe $-\sqrt{3} + i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$. **1,5pt**

Exercice 3 : 5pts

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :
$$\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1-a) Démontrer par récurrence que les points $M_n(x_n ; y_n)$ sont sur une droite $(D): 2x - y - 5 = 0$ **0,5pt**
- b) En déduire que : $x_{n+1} = 2x_n - 1$ **0,5pt**
- 2) Montrer par, récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels. **0,5pt**
- En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels. **0,5pt**
- 3) Soit n un entier naturel.
 - a.) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5. **0,75pt**
 - b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisible par 5, alors leur diviseur commun est égal à 1. **0,75pt**
- 5) Soit n un entier naturel.
 - a) Montrer par récurrence que $x_n = 2^{n+1} + 1$. **0,5pt**
 - b) Démontrer par récurrence que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4} **0,5pt**
 - c) En déduire les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5pts)

Situation :

M. ATEBA ouvre trois comptes en fin janvier 2019 pour la préparation des inscriptions en début du mois de septembre 2020 dans un institut Supérieur de ses trois enfants Pierre, Agnès et Arnaud. Ces enfants seront inscrits respectivement en première, deuxième et troisième année et de pension respectives 350 000 FCFA, 375 000 FCFA et 500 000 FCFA.

- Dans le premier compte logé dans une association villageoise, il dépose la somme de 200 000 FCFA en fin janvier 2019. A la fin de chaque mois, ce montant augmente de 5% par rapport au mois précédent.

M. ATEBA compte y payer la pension de Pierre avec la totalité du montant consolidé en début du mois de septembre 2020.

- Dans le second compte qui est son propre coffre, il dépose la somme de 50 000 FCFA en fin janvier 2019. A la fin de chaque mois, il verse la somme de 25 000 FCFA à déduire de son salaire mensuel. M. ATEBA compte payer la pension de son fils Arnaud en début du mois de septembre 2020 à l'aide de la somme contenue dans ce coffre.

Par ailleurs, M. ATEBA fait un travail parallèle dont la rémunération au premier mois (fin janvier 2019) est de 80 000 FCFA et pour les autres mois, il y a une augmentation fixe 8 000 FCFA par mois. Cette somme est déposée dans le troisième compte (appelé compte personnel). Tout le montant cumulé en début du mois de septembre 2020, M. ATEBA compte y payer la pension de sa fille Agnès.

Tâches :

- 1) La totalité d'argent contenu dans le premier compte jusqu'en début du mois de septembre 2020 pourra-t-elle permettre à M. ATEBA de payer la pension de son fils Pierre ? **1,5pt**
- 2) La totalité d'argent contenu dans le second compte jusqu'en début du mois de septembre 2020 pourra-t-elle permettre à M. ATEBA de payer la pension de son fils Arnaud ? **1,5pt**
- 3) La totalité d'argent contenu dans le troisième compte jusqu'en début du mois de septembre 2020 pourra-t-elle permettre à M. ATEBA de payer la pension de sa fille Agnès ? **1,5pt**

Présentation :

0,5pt

EXAMINATEUR : Hervé Battiston NGANMENI KONGUEP & Constant TANKEU