DEVOIR :

Ecoles MAARIF de TURQUIE Section Fille	Série : T.S.E Epreuve de : Mathématiques	2020-2021	Durée : 3 h 30 COEF : 4

Exercice 1: 5 pts

I. Ecris sous forme exponentielle $z_0 = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin x+i\cos x)}{2(1-i)(\cos x-i\sin x)}$ 0,75 pt

II. Soit le complexe On considère le nombre complexe $z = i - \sqrt{3}$

1) Ecris sous formes trigonométrique et cartésienne les racines carrées de z. 1 pt
2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$. 0,75 pts

III. Soit l'équation $(E): z^4 - 2z^3(\cos\alpha + \sin\alpha) + 2z^2(1+\sin 2\alpha) - 2z(\cos\alpha + \sin\alpha) + 1 = 0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Déterminer deux nombres a et b tels que : $(E) \Leftrightarrow z^2\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z+\frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$. 0,75 pt
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$Z^2 + aZ + b = 0$; puis l'équation (E). 1,75 pt

Exercice 2: 4,50 pts

I. z étant un nombre complexe, on considère l'équation $(E): z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

1) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E). 0,75 pt
2) Déterminer sous forme algébrique toutes les solutions de (E). 1 pt

II. On considère les complexes $a = 1 - i$; $b = 2 - i$ et $c = 3 + i$

1) Ecrire les complexes a^3 ; $\left(\frac{a}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^2$ et $\left(a^4 e^{i\pi}\right)^5$ sous forme trigonométrique. 1,75 pts
2) On pose $S = \frac{z-b}{z-c}$ et on désigne par $A; B; C$ et M les points images de $a; b; c$ et z
   a) Interpréter géométriquement le module et un argument de S. 0,50 pt
   b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|S| = 1$. 0,50 pt

Problème : 10,50 pts

I. On pose $U = e^{2i\frac{\pi}{7}}$, $S = U + U^2 + U^4$ et $T = U^3 + U^5 + U^6$

1) Calcule U^7. 0,50 pt
2) Démontre que S et T sont conjugués, et que la partie imaginaire de S est positive. 1,75 pt
3) Calcule $S + T$ et $S.T$. 1 pt
4) En déduis que :$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$. 1,75 pt

II. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. On appelle f l'application qui à M d'affixe $z \neq 2$ associe le point M' d'affixe z' telle que :$z' = \frac{z-1-i}{z-2}$

Soit $A; B$ et C les points d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = 1 - i$ et $c = 2$

1) Détermine $f(A)$ et $f(B)$. 0,75 pt
2) Détermine le point D tel que :$f(D) = C$. 0,5 pt
3) Interprète géométriquement $|z - 1 - i|$ et $|z - 2|$. 0,50 pt
4) En déduis que si le point M appartient à la médiatrice de $[AC]$, $M' = f(M)$ appartient au cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. 0,75 pt

III. Pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on pose :$g(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$

1) Résoudre l'équation :$y \in \mathbb{R}, g(iy) = iy$. 0,75 pt
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ 'équation $(E) : g(z) = z$ 0,75 pt
3) On désigne par z_0; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que :$Re(z_0) = 0$ et $Re(z_1) > Re(z_2)$
   a) Vérifier que $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ et que $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$. 0,75 pt
   b) En déduire l'écriture trigonométrique de z_1 et z_2. 0.75 pt

Osons les mathématiques et vivons les mathématiques