# Exercices TRIGO

## LPMT 11$^{\text{ème}}$ Sciences 2020/2021

### EXERCICE1

**1.** Donner la mesure en radians de chaque angle suivant :

$30°$ $\quad -45°$ $\quad 70°$ $\quad 135°$

**2.** Donner la mesure en degrés de chaque angle suivant :

$\frac{\pi}{2}rad$ $\quad \frac{5\pi}{6}rad$ $\quad -\frac{4\pi}{3}rad$ $\quad 1{,}5\pi\, rad$

**3.** Construire un cercle trigonométrique et placer les points images des nombres réels suivants

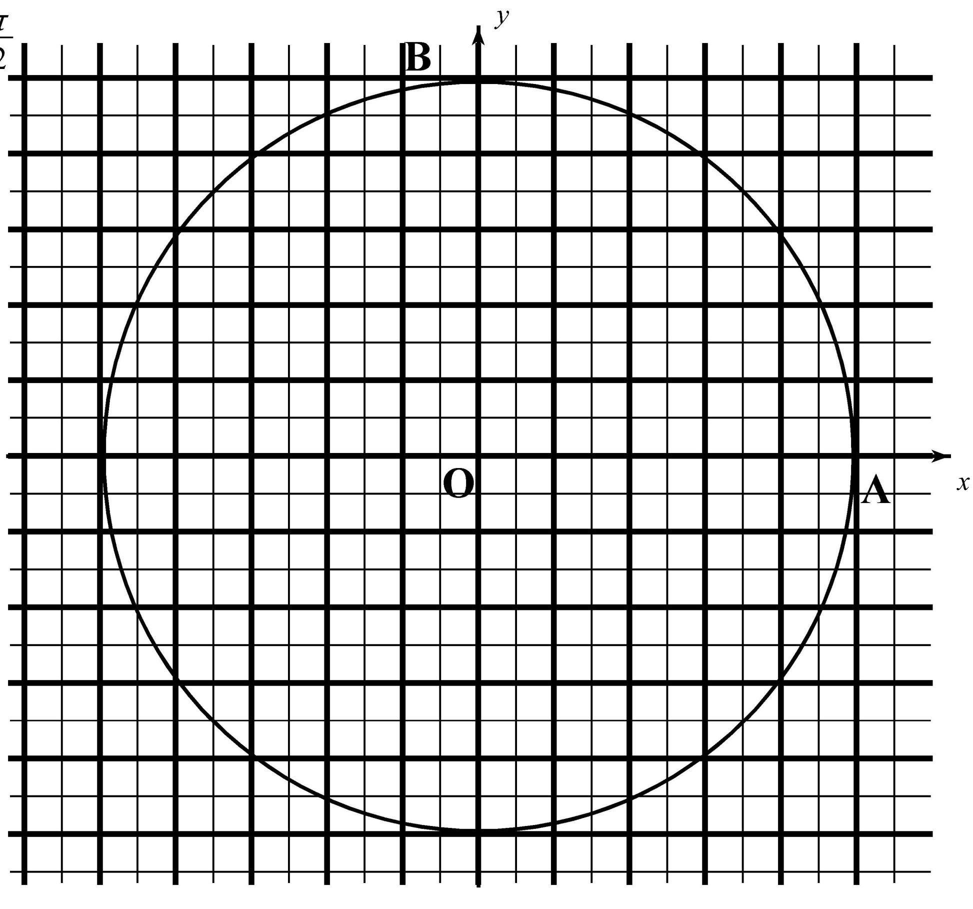
$\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{5\pi}{6}$ $\quad \frac{2\pi}{5}$ $\quad \frac{-\pi}{3}$ $\quad \frac{-5\pi}{4}$ $\quad \frac{2011\pi}{2}$

**4.** Compléter le tableau ci-dessous en donnant la mesure principale correspondante :

| $\frac{21\pi}{2}$ | $\frac{-19\pi}{6}$ | $\frac{37\pi}{4}$ | $\frac{-29\pi}{9}$ | $\frac{100\pi}{3}$ | $\frac{-47\pi}{8}$ | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

### EXERCICE2

**I°)** Le cercle ci-dessous est un cercle trigonométrique de centre O ; A et B sont deux points de ce cercle tels que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$



Placer sur ce cercle les points C, D, E, F, G, H, I, J et K tels que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{6}$ ? $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{4}$ ,

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{3}$ , $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{3}$ , $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{2\pi}{2}$ , $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}\right)=\pi$ , $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}\right)=-\frac{3\pi}{4}$ ,

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}\right)=-\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{\pi}{6}$

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

On dit que c' est un repère orthonormal direct ; on exprime par là, le fait que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{ et non } -\frac{\pi}{2}\right)$

**II° )** Soit $(C)$ un cercle de centre A et B un point de $(C)$

1 ) Construire les points C , D, E et F du cercle $(C)$ tels que :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ ; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3\pi}{4}$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{7\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)=-\frac{3\pi}{4}$

2 ) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)$

## EXERCICE3:

**1 )** Sachant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

En déduire $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ , $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{35\pi}{12}\right)$ ,$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ , $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{35\pi}{12}\right)$

**2 )** Calculer

**i.** $A=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$

**ii.** $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

**iii.** On donne $E=\cos^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{12}+\cos^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{11\pi}{12}$

Montrer que E est un entier naturel.

**EXERCICE4 :** Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1 ) Construire les points A, B et C de coordonnées polaires respectives $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ et calculer les abscisses et les ordonnées de ces points.

2 ) Construire les points $D(-2;-2)$ $E(-3;0)$ $et$ $F(-\sqrt{3};1)$

Quelles sont les coordonnées polaires de ces points ?

## EXERCICE 5:

1 ) Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
2 ) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.
3 ) Exprimer $\tan(3x)$ en fonction de $\tan(x)$ uniquement

## EXERCICE 6: I° ) Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

**1 )** $\sin(x)=0$ , **2 )** $\sin(x)=1$ , **3 )** $\sin(x)=-1$, **4 )** $\cos(x)=1$ **5 )** $\cos(x)=-1$, **6 )** $\cos(x)=0$,

**7 )** $\tan(x)=0$, **8 )** $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; **9 )** $\sin(2x)=\sin(3x)$; **10 )** $\sin(2x)=\cos(3x)$; **11 )** $\cos(2x)=\cos^2(x)$

**12 )** $\cos(x)+\sin(x)=1$ ; **13 )** $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=3$; **14 )** $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0$ ; **15 )** $\cos x=\frac{1}{2}$; **16 )** $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **17 )** $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **18 )** $\sin x=-\frac{1}{2}$

**II° ) 1° )** Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}\ \frac{3\pi}{2}\right]$ les équations suivants : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ $\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

2° ) Résoudre dans ℝ puis dans $[-\pi;\pi]$ les équations suivants :

$\cos\frac{x}{2}=0$ ; $\cos(3x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ; $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

**III°)** Déterminer l'angle α en radians, dans les cas suivants :

1°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$; 2°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$; 3°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$; 4°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

5°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$; 6°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$; 7°) $\begin{cases}\cos\alpha=-1\\ \sin\alpha=0\end{cases}$; 8°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

9°) $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=1\end{cases}$; 10°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$; 11°) $\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \sin\alpha=0\end{cases}$; 12°) $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

13°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$; 14°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$; 15°) $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=-1\end{cases}$; 16°) $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

## EXERCICE 7:

**I° )** *D*émontrer les identités suivante

**1°)** $\tan x = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$ **2°)** $\dfrac{\sin x + \sin(5x)}{\cos x + \cos(5x)} = \tan(x)$

**3°)** $\dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan(y)$ **4°)** $\dfrac{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$

**II°) 1°) D**onner l'expression factorisée de

$a)$ $A = \sin(5x) + \sin 3x$ ; $b)$ $B = \sin x - \sin 5\,x$ ; $c)$ $C = \cos 4x - \cos 6x$

$d)$ $D = \cos 9x + \cos 3\,x$ ; $e)$ $E = \sin 4\,x - \sin 2\,x$ ; $f)$ $F = \cos 11x + \cos 3\,x$

**2°)** Factoriser $f(x)$ puis en déduire une résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équationf( x ) =0 dans les cas suivants :
$f(x) = \sin 3\,x + \sin x + 2\,\sin 2\,x$ ; $f(x) = \cos 3\,x + \cos x + 2\,\cos 2\,x$

## EXERCICE 8:

**1°)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x puis placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions.

**a)** $2\cos(x) - 1 = 0$ ; ***b)*** $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$ ; ***c)*** vérifier que $4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$ puis résoudre $-4\sin^2(x) - 2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos(x) + 4 - \sqrt{3} = 0$

**2°)** a) Calculer $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$

b) En déduire la résolution dans $[0\,;\,2\pi]$ de : $-4\sin^2(y) + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cos(y) + 4 - \sqrt{6} = 0.$

Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

**²3°)** Résoudre $(x; y) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ le système $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ cos(x)\,cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

**4°)** Résoudre $(x; y) \in [0; \pi] \times [0; \pi]$ le système $\begin{cases} cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

## EXERCICE9 :

***I°)*** *R*ésoudre les équations suivantes

***a°)*** $x \in \mathbb{R},\ \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$ ; $b°)$ $x \in [-2\pi; 2\pi]$, $\sin^2(2x) - 4\sin(2x) + 3 = 0$

***c°)*** $x \in \mathbb{R},\ -2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos x - 4\cos^2 x + \sqrt{2} = 0$ ; ***d°)*** $x \in \mathbb{R}, \cos(5x) - \cos(x) = \sin(3x)$

***e°)*** $x \in [-\pi;\pi]$, $2\sin^2(x) + (2-\sqrt{2})\sin(x) - \sqrt{2} = 0$ ; $f°)$ $x \in [-2\pi;2\pi]$, $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$

***g°)*** $x \in [0;2\pi]$, $2\sin^2(x) + 7\cos(x) - 5 = 0$ ; $h°)$ $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$

***i°)*** $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(2x)\sin(x) = \sqrt{3}\sin(x)$ ; ***j°)*** $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sin x$

***k°)*** $x \in \mathbb{R}$, $-\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 = 0$ ; $l°)$ $x \in [0;2\pi]$, $\sqrt{2} + 2(\sqrt{2}-1)\sin x = 4\sin^2(x)$

***m°)*** $x \in \mathbb{R}$, $2\sin(2x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)$ ; $n°)$ $x \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$, $\mathrm{tg}(2x) = \sqrt{3}$

***p°)*** $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = \sqrt{6}$ ; $q°)$ $x \in \mathbb{R}$, $-\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{2} = 0$

***r°)*** $x \in \mathbb{R}$, $2\cos x \times \sin x + 4\sin(2x) = 0$ ; $s°)$ $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = -1$.

**II° )** Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes

$a)$ $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos(x) = 2$ ; $b)$ $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$ ; $c)$ $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$

$d)$ $3\sqrt{3}\cos(\pi x) + 3\sin(\pi x) = 0$ ; $e)$ $\cos(3x)\cos(x) = \sin(3x)\sin(x)$

$f)$ $\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x) = \frac{1}{2}$; $h)$ $2\sin(x)\cos(x) + 2\sqrt{3}\cos(x) - \sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$

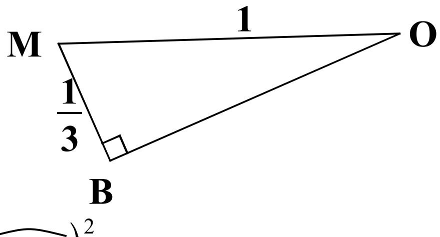
$g)$ $4\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$ ; $i)$ $2\sin(x)\tan(x) - \tan(x) = 1 - 2\sin(x)$

## EXERCICE 10:

**I° )** 1 ) Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $x$ sachant que $3\sin x + 4\cos x = 5$

2 ) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin(x) > 0$

**II° )** Les dimensions du triangle OBM sont données sur la figure :
Entourer parmi les données suivantes, celles qui sont correctes

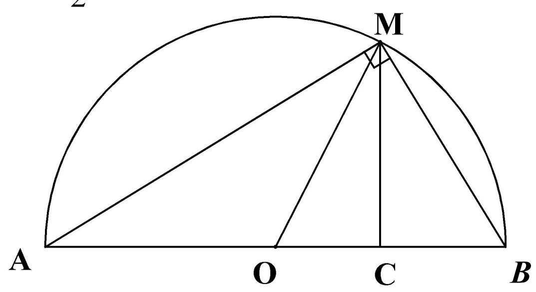



$OB = \frac{2}{3}$ $\quad$ $Sin\ \widehat{BMO} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $OB = \frac{2\sqrt{2}}{30}$

$Sin\ \widehat{BOM} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $Cos\ \widehat{BOM} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\left(Sin\ \widehat{BOM}\right)^2 + \left(Cos\ \widehat{BOM}\right)^2 = 1$

## EXERCICE 11:

Sur la figure ci-contre $OA = OB = OM = 1$ $\widehat{BOM} = \beta$ et $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$




On pose $\widehat{OAM} = \alpha$

1 ) Montrer que $\beta = 2\alpha$ .

2 ) justifier les égalités suivantes:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{AM}{AB}$$

3 ) Montrer que $AC = 1 + \cos 2\alpha$ ; exprimer AM en fonction de cos α .

4 ) Démontrer l'égalité suivante : $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

5 ) Application

Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

## **EXERCICE** 12:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé diret $\left(O; \overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j}\right)$ . ( C ) est le cercle trigonométrique de centre O .

**1 )** placer sur ce cercle trois points A , B et M tels que $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{5}$ et $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{5}$

2 ) Les droites $(OB)$ et $(AM)$ se coupent en N.

a ) Montrer que le triangle OAN et le triangle OMN sont destriangles isocèles.

b ) On appelle H , K et L , les projetés orthogonaux respectifs de M sur $(OA)$ et O sur $(AN)$.

Exprimer en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$ ou $\cos\frac{2\pi}{5}$ , les distanctes suivantes : OH , ON , AN, OK , AL, AM et AK .

3 ) En remarquant que $AN - AM = 1$ et $OK + KA = 1$ , montrer les égalités suivantes :

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \cos\frac{\pi}{5} + 2\cos^2\frac{2\pi}{5} = 1$$

**4 )** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} X - Y = \frac{1}{2} \\ X + 2Y^2 = 1 \end{cases}$

***a*** **)** En déduire $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos^2\frac{\pi}{5}$

b ) Compléter le tableau suivant :

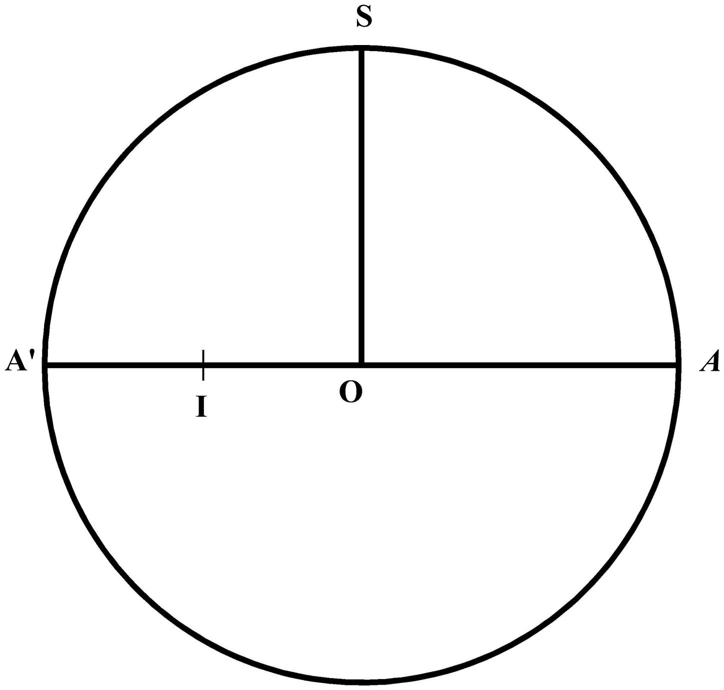
| α | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{4\pi}{5}$ | $\frac{6\pi}{5}$ | $\frac{7\pi}{5}$ | $\frac{8\pi}{5}$ | $\frac{9\pi}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cosα | | | | | | | | |

5 ) Sur la figure ci-dessous, OA = 1 et I est le milieu de $[OA']$

Calculer IS.

Soit T le point de $[OA]$ tel que IT = IS et R le milieu de $[OT]$calculer OR .

En déduire la construction d'un pentagone régulier .




**EXERCICE** 13

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $x \in [0; 2\pi[$, $cos(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2°) $x \in [0; \pi[$, $tg(x) \geq \sqrt{3}$ ; 3°) $x \in \mathbb{R}$, $sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 4°) $x \in \mathbb{R}$, $2\,cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$ ; 5°) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\,cos(x) + sin(x) \geq 1$;

6°) $x \in \mathbb{R}$, $4\,cos^2(x) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) cos(x) + \sqrt{6} \leq 0$