Jeudi 18 Février

GROUPE SCOLAIRE CLAIRE FONTAINE Année scolaire : 2020-2021	DEVOIR DE MATHEMATIQUES N° 2	Durée : 2 heures Coeff : 4 Classe : TSE

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z non nul on associe le point M'n d'affixe $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$

1) Construire les images des points A d'affixe $1 + i$ et B d'affixe $2i$.

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' des nombres réels.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b) En déduire que O, M et M' sont alignés. $z = a \in \mathbb{R}$

3) Montrer que : $\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1)$

4) On note C et D les points d'affixe 1 et -1. On note (Γ) le cercle de centre C passant par O et privé de O. On suppose dans cette question que $M \in (\Gamma)$.

a) Justifier que $|z - 1| = 1$.

b) Montrer que $|z' + 1| = |z'|$ et interpréter géométriquement cette relation.

Exercice 2

1) On considère l'équation (E) d'inconnue z définie par (E): $2z^2 + 3\bar{z}^2 = 5 + i$

a) Démontrer que $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ et $z^2 - \bar{z}^2 = -2i$.

b) En déduire un module et un argument de z^2.

c) Déterminer l'ensembles des nombres complexes z qui vérifient l'équation (E).

2) Résoudre l'équation $z^2 \sin^2 \alpha + z\sin 2\alpha + 1 + \cos^2\alpha = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation. Vérifier que $z_1^2 + z_2^2$ est un réel indépendant de α.

On désigne par M_1 et M_2 les points images des solutions z_1 et z_2. Déterminer α tel que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $M_1M_2 = 2\sqrt{2}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 = (1 + 2i)^4$.

Exercice 3

A) Soit α un nombre réel tel que $\alpha \in]-\pi; \pi[$ et Z le nombre complexe défini par :

$$Z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}$$

Ecrire Z sous forme trigonométrique.

B) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe Z, M_1 d'affixe Z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe Z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $\vec{u}$. Enfin on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1)a) Démontrer que $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 1$.

b) Déterminer l'image du point B par T.

c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2) On pose $Z = x + iy$, avec x et y des réels.

a) Pour Z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{Z'}{Z}$ en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O.

c) Tracer (E).

3) Dans cette question on pose $Z = -1 + i$.

a) Vérifier que M appartient à E. Placer M et M' sur la figure.

b) Calculer le module de Z'.

c) Calculer l'aire, en cm^2 du triangle OMM'.