MINESEC
Lycée de Garoua Djamboutou
Département de Mathématiques

Année scolaire 2020/2021
Composition de fin du trimestre 2
Classe: T^{le}C **Durée : 4 heures** **Coef : 7**

Épreuve de Mathématiques

EXERCICE 1 5.5 points

I/ Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace et k un réel de l'intervalle $[-1;1]$. On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)\}$.

1) Montrer que pour tout réel $k \in [-1;1]$ on a: $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$. **0,5 pt**

2.a) Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par: $f(x) = \frac{-x}{1+x^2}$. **1 pt**

b) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1;1]$. **0,5 pt**

3) L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $(1;0;-1)$, $(2;1;0)$, $(0;1;-1)$ et $(-1;0;4)$.

On désigne par (Γ), l'ensemble des points M, du plan tel que $MA^2 + MD^2 = 29$.

a) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires. **0,5 pt**

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. **0,25 pt**

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ). **0,5 pt**

II/ L'espace est orienté. On considère les vecteurs unitaires orthogonaux de E_3 et f l'application de E_3 dans E_3 définir par: $\forall \vec{a} \in E_3$, $f(\vec{a}) = (\vec{v} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{u}$.

1) Démontrer que f est un endomorphisme de E_3; Déterminer $Ker f$ et $Im f$. **1,5 pt**

2) On pose $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Calculer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ et f($\vec{w}$). **0,75 pt**

EXERCICE 2 2 points

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$.

1) Soit n un entier fixé $(n \geq 1)$.

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par: $f(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $[0;1]$ et que $f'(x) = -e^{-x}\left(\frac{x^n}{n!}\right)$. **0,75 pt**

b) En déduire que, pour tout réel x de $[0;1]$ on a: $|f'(x)| \leq \frac{1}{n!}$. **0,25 pt**

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0,1]$, montrer que $|\frac{1}{e}u_n - 1| \leq \frac{1}{n!}$. **0,5 pt**

2) En déduire que $|u_n - e| \leq \frac{e}{n!}$, puis calculer la limite de u_n. **0,5 pt**

EXERCICE 3 : 3,75 points

I/1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation: $12x - 5y = 3$. **0,75 pt**

2) On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par: $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_n$, pour $n \geq 0$. On désigne par M_n le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$. **0,75 pt**

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$. **0,5 pt**

II/ ABC est un triangle quelconque. On construit à l'exterieur de ABC les triangles équilatéraux $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ et l'on désigne par E, F et G respectivement les centres de gravités de ces trois triangles équilatéraux.(***On pourra utiliser les rotations de centres*** A ***et*** C).

1) Faire une figure et démontrer que $AA' = BB' = CC'$. **0,75 pt**

2) Déterminer la similitude S telle que $S(B') = F$ et $S(B) = G$.

Démontrer que EFG est équilatéral. **1 pt**

EXERCICE 4 : **3,75 points**

1) Pour tout entier naturel n, on considère $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x dx$ et $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $na_n + 2b_n = 2$ et $-2a_n + nb_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}$. **1,5 pt**

b) Déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier naturel n. **1 pt**

c) Les suites numériques (a_n) et (b_n) sont elles convergentes? **0,5 pt**

2) Soit (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n e^{-(x+1)}\sqrt{x}dx$.

Montrer que la suite numérique (I_n) est croissante. **0,75 pt**

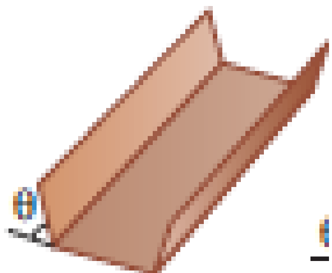
EVALUATION DES COMPETENCES: 4,5 points

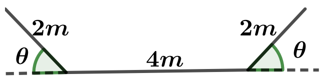
"Résoudre des situations de vie où interviennent les équations équations diophantiennes et les problèmes d'optimisation"

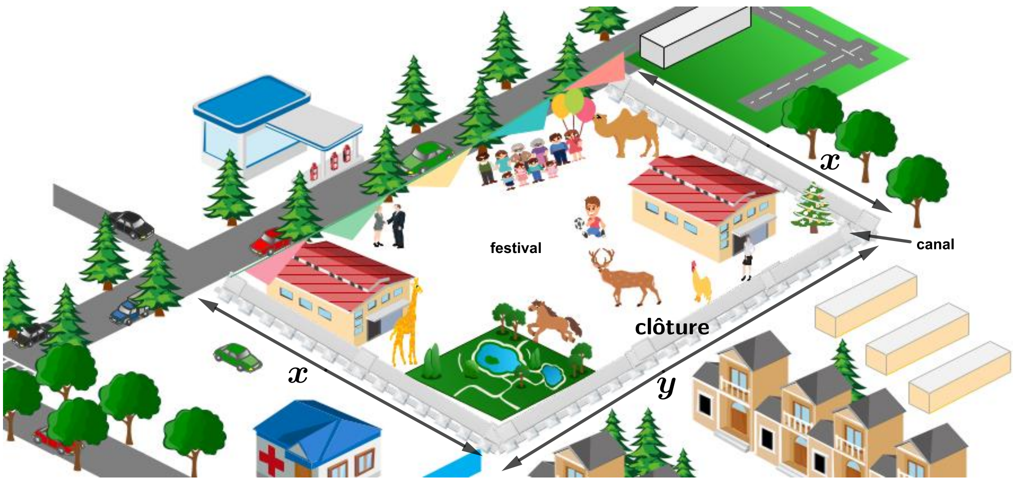
Un festival est organisé dans la ville de Garoua et reçoit des hommes, des femmes et des enfants. Dans ce festival est organisé un jeu de pièces. Un groupe composé d'hommes et de femmes a utilisé 100 pièces, les hommes ont utilisé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacun.

Un spectacle est organisée au sein du festival et le prix x d'un billet de participation varie entre 500 $FCFA$ et 3 000 $FCFA$. Pour un nombre y de personnes, on a la relation $y = 50 + \frac{722500}{x^2}$ et $R(x)$, la recette du spectacle.

Pour les besoin d'hygéne, on construit en bêton, un canal d'évacuation de déchets. Une coupe transversale de ce canal doit avoir la forme d'un trapèze isocèle dont la petite base, constituant le fond du canal sera de $4\,m$ et les côtés isocèles de $2\,m$.







Tâche 1: Déterminer le nombre d'hommes et de femmes que pouvait comporter le groupe. **1.5 pt**

Tâche 2: Déterminer la recette maximale et la recette minimale du spactacle en indiquant le prix d'un billet. **1.5 pt**

Tâche 3: Déterminer l'angle $\theta \in [60^\circ; 90^\circ]$ pour que la capacité du canal soit maximale. **1.5 pt**

Présentation: 0,5 pt.

A méditer

"Celui qui néglige l'infiniment petit, n'aura jamais l'infiniment grand."
Travaillez, travaillez, travaillez encore et travaillez par vous même.