

SESSION INTENSIVE DE MATHEMATIQUES DU 05 NOVEMBRE 2020

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 POINTS)

I- ARITHMETIQUE (7.5 Points)

EXERCICE I : (3 Points)

- Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que $PPCM(a; b) + PGCD(a; b) = a + b$ (1pt)
- Soit p un nombre entier relatif. On pose $u = 14p + 3$ et $v = 5p + 1$
Soit l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ dans \mathbb{Z}^2
On désigne par (D) la droite d'équation $87x - 31y = 2$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - Montrer que les entiers u et v sont premiers entre eux. (0.5pt)
 - En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux. (0.25pt)
 - Résoudre l'équation (E) (0.75pt)
 - Déterminer les points de (D) dont les coordonnées sont des entiers naturels et les abscisses sont plus petites ou égales à 100. (0.5pt)

EXERCICE II : (2.75 Points)

- Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 1$ divise $2n + 3$ (0.5pt)
- Soit x un entier naturel supérieur ou égal à 5.
On définit en base x les nombres y et z par : $y = \overline{123}$ et $z = \overline{201}$
 - Sans connaître x , écrire le produit $x \times y \times z$ en fonction de x . (0.5pt)
 - Sachant que $x + y + z = 92$, déterminer x, y et z . (0.75pt)
- En faisant la division d'un entier a par un entier b , on trouve $0,285714\ 285714\ 285714\ \dots$ avec un bloc de 6 chiffres 285714 qui se répète indéfiniment.
Déterminer cette fraction sous la forme irréductible. (0.5pt)

EXERCICE III : (1.75pt)

- Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de $2222^{3333} + 3333^{2222}$ (0.75pt)
- Montrer que si l'entier $5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$ est divisible par 13, alors n (n entier naturel) n'est pas multiple de 4. (1pt)

II- NOMBRES COMPLEXES (7.5 Points)

EXERCICE I : (3.5 Points)

- 1.1. Calculer les racines cubiques de l'unité sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. (1pt)
 - 1.2. Calculer $(2 + i)^3$ sous forme algébrique et en déduire sous forme algébrique les racines cubiques de $2 + 11i$. (1pt)
- Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{20}} - \frac{(-1-i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{20}} \quad z_2 = \frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta} (\theta \in \mathbb{R}) \quad (1.5pt)$$

EXERCICE II : (2.25 Points)

On considère dans \mathbb{C}^3 , le système d'inconnues x, y, z suivant $(S) : \begin{cases} x + y + z = 2i - 1 \\ xy + yz + xz = -2(1 + i) \\ xyz = 2 \end{cases}$

- 1- Soit le polynôme à variable complexe z défini par : $p(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 - 2(1 + i)z - 2$
Montrer que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ est solution du système (S) si et seulement si a, b et c sont racines de P . (1pt)
- 2- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle et une seule que l'on déterminera. (0.75pt)

- 3- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$ et en déduire les solutions du système (S) dans \mathbb{C}^3 . (0.5pt)

EXERCICE III : (1.75 Points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- 1- Montrer que les points $A(-1 + i), B(-1 - i), C(2i)$ et $D(2 - 2i)$ appartiennent à un même cercle dont on donnera le centre et le rayon. (1pt)
- 2- Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation :
 $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ (0.75pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES (4.5 POINTS)

En ce jeudi matin du 05 novembre de l'année bissextile 2020, M Ela Ondo a organisé un carrefour ayant pour but de solutionner trois questions précises.

Organiser une fête anniversaire d'un entrepreneur né le 11 mars 1972.

Découvrir le nouvel annuaire téléphonique contenant moins de 1000 pages où sont inscrits 999 991 abonnés et dont chaque page contient le même nombre d'abonnés.

Il invite une personne dans l'assistance à choisir un nombre entier secret compris entre 1 et 63 et à désigner, parmi les 6 cartes suivantes celles contenant le nombre choisi.

CARTE A	CARTE B	CARTE C	CARTE D	CARTE E	CARTE F
1 17 33 49	2 18 34 50	4 20 36 52	8 24 40 56	16 24 48 56	32 40 48 56
3 19 35 51	3 19 35 51	5 21 37 53	9 25 41 57	17 25 49 57	33 41 49 57
5 21 37 53	6 22 38 54	6 22 38 54	10 26 42 58	18 26 50 58	34 42 50 58
7 23 39 55	7 23 39 55	7 23 39 55	11 27 43 59	19 27 51 59	35 43 51 59
9 25 41 57	10 26 42 58	12 28 44 60	12 28 44 60	20 28 52 60	36 44 52 60
11 27 43 59	11 27 43 59	13 29 45 61	13 29 45 61	21 29 53 61	37 45 53 61
13 29 45 61	14 30 46 62	14 30 46 62	14 30 46 62	22 30 54 62	38 46 54 62
15 31 47 63	15 31 47 63	15 31 47 63	15 31 47 63	23 31 55 63	39 47 55 63

En observant les cartes extraites du lot, il trouve le nombre secret en quelques secondes.

- 1- L'entrepreneur est né quel jour de la semaine ? (1.5pt)
- 2- Combien de pages y a-t-il dans cet annuaire ? (1.5pt)
- 3- Comment procède-t-il pour trouver aisément le nombre choisi. ? (1.5pt)

PRESENTATION :

(0.5pt)