COLLEGE MODERNE DE LA BENOUE
Département de Mathématiques

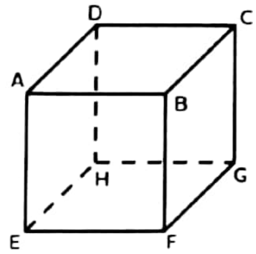
Année scolaire 2020-2021
Evaluation n°1 du trimestre 2
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Classes : Tle C Durée : 4h

A) EVALUATION DES RESSOURCES : 15pts

Exercice 1: 2,75pts

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 représenté ci-contre.

On considère le repère $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$



1) a) Déterminer dans ce repère les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}$ **1pt**
   b) En déduire l'aire du triangle ACF . **0,25pt**
2) Calculer la distance du point B au plan (ACF) . **0,5pt**
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ACF) dans le repère $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$ est $x - y + z = 1$ **0,5pt**
4) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (ACF). **0,5pt**

Exercice 2: 3,5pts

1) **a)** Tracer un carré $ABCD$ de centre I inscrit dans un cercle (C) et tel qu'une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})$ soit $\frac{\pi}{2}$. **0,5pt**
   b) Calculer en fonction de la distance AB l'aire du disque délimité par (C) . **0,5pt**
2) On note S la similitude directe plane de centre B qui transforme A en D. Soit D' et I' les images respectives de D et I par S.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S. **0,5pt**
   b) Prouver que $I' = C$ et en déduire que C est le milieu du segment $[BD']$. **0,5pt**
   c) Soit (C') le cercle image de (C) par la similitude S. Evaluer l'aire du disque délimité par (C'). **0,5pt**
3) On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans lequel B a pour coordonnées $(1; 1)$
   a) Donner l'écriture complexe de S. **0,5pt**
   b) Déterminer l'expression analytique de S. **0,5pt**

Exercice 3 : 2,75pts

E est un espace vectoriel muni d'une base orthonormée directe $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

F est un plan vectoriel muni d'une base $B' = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

f est l'application de E dans E définie par $f(\vec{u}) = \vec{w} \wedge \vec{u}$ où $\vec{w}$ est un vecteur fixé.

1) Démontrer que f est un endomorphisme de E. **0,5pt**

   On pose pour la suite de l'exercice $\vec{w} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

2) Démontrer que la matrice de f dans la base B est $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **0,75pt**
3) Déterminer $ker f$ puis une base de $ker f$. **0,75pt**
4) Déterminer une équation de $Im f$ et une base de $Im f$. **0,75pt**

Exercice 4 : 6pts

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. ***On prendra 2cm comme unité.***

1) Construction de (C_f)

a) Montrer que (C_f) admet deux asymptotes horizontales. **0,5pt**

b) Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$ puis dresser le tableau de variation de f **0,75pt**

c) Construire (C_f). **0,5pt**

d) Justifier que f une bijection de IR dans un intervalle que l'on précisera. **0,5pt**

e) Construire la courbe de f^{-1} dans le même repère que (C_f). **0,5pt**

f) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [-1;0]$. **0,5pt**

2) Recherche de la limite d'une suite

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n),\ pour\ tout\ n \in IN \end{cases}$

On pose $I=[-1;0]$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \in I$. **0,5pt**

b) Montrer par récurrence que (U_n) est [redacted] décroissante **0,5pt**

c) En déduire que (U_n) est convergente. **0,25pt**

d) **i)** Montrer que pour tout réel x de I, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ **0,5pt**

ii) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$. **0,25pt**

iii) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$ **0,5pt**

iv) Quelle est la limite de la suite (U_n) ? **0,25pt**

B) EVALUATION DES COMPETENCES : 5pts

Situation :

François a travaillé pendant 30 ans comme agent de liaison dans une entreprise des biens et services. Dans les accords que François a eus avec son patron, il devait obtenir une augmentation fixe sur son salaire chaque année. Dans ses souvenirs, François sait que son salaire mensuel à la dixième année était de 69 000 Frs et qu'avant son départ à la retraite, le comptable de la boîte lui a présenté un cumul de tout son salaire pendant les 30 années : une somme de 30 780 000Frs.

Pour régler les problèmes d'eau dans son village, François a fait appel à une entreprise pour creuser un forage. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à 510m, cette entreprise creuse 2m le premier jour , 4m le deuxième,8m le troisième jour et ainsi de suite.

Afin de stocker de l'eau, François a acheté un cubitainer ayant la forme d'un tétraèdre dont les sommets dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (*Unité graphique de chaque axe : 1m*) sont les points $A(-1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;2;-1)$ et $D(1;-1;4)$.

Tâches :

1- Déterminer le montant du premier salaire mensuel de François. **1,5pt**

2- Combien de jours faut-il à cette entreprise pour atteindre la nappe phréatique ? **1,5pt**

3- Quelle est la capacité en litres du cubitainer ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt (Absences de ratures : 0,25pt ; Marge non violée : 0,25pt)