

Épreuve de Mathématiques

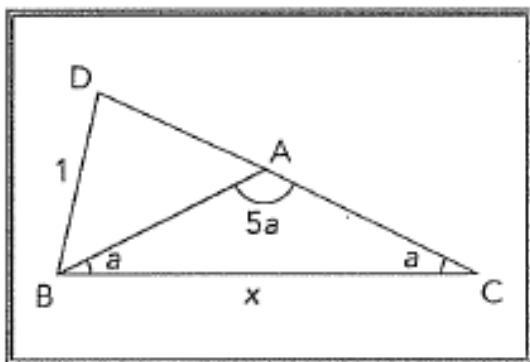
L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 93 PTS

Exercice 1 : 21 points

1. Soient E et F deux espaces vectoriels . Définir : **sous espace vectoriel de E , dimension d'un sous espace vectoriel de E , application linéaire de E vers F .** **4,5 pts**
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^3$. On donne $A = \{x \in E : x = (a; b; 2b); a, b \in \mathbb{R}\}$.
 - (a) Montrer que A est un sous espace vectoriel de E . **3 pts**
 - (b) Donner une base de A et déduire $\dim A$. **3 pts**
 - (c) Soit $B = \{x \in E : x = (k + h; 2h; 3h); h, k \in \mathbb{R}\}$.
 - i. Déterminer $\dim B$. **2 pts**
 - ii. Déterminer $A \cap B$ et préciser sa dimension . **8,5 pts**

Exercice 2 : 27 points



Sur la figure donnée ci-après , les triangles ABC et CBD sont isocèles . a et x sont des réels . les autres renseignements sont portés sur la figure . L'unité de mesure d'angle est le radian dans tous l'exercice .

1. Donner la valeur de a . **1,5 pt**
2. Exprimer $Mes(\widehat{BAD})$, $Mes(\widehat{ADB})$ et $Mes(\widehat{ABD})$ en fonction de a . **4,5 pt**

On suppose dans la suite que $a = \frac{\pi}{7}$. On souhaite démontrer dans la suite que $\cos(\frac{\pi}{7})$ est une solution de l'équation (E) suivante (E) : $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$.

1. Déduire : la nature du triangle ADB et montrer que $AB = x - 1$. **3 pt**
2. Justifier que $\cos(\frac{a}{2}) = \sin(3a)$ et que $\sin(\pi - 5a) = \sin(2a)$. **3 pt**
3. En utilisant le théorème des sinus , déduire : $\frac{\sin(3a)}{x} = \sin a$ et $\frac{\sin(3a)}{x-1} = \sin(2a)$. **6 pt**
4. Établir que $\sin(3a) = \sin a(4\cos^2 a - 1)$ (remarquer que $3a = 2a + a$) . **4,5 pt**
5. Déduire que $x = 4\cos^2 a - 1$ et que $x - 1 = \frac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$. **3 pt**
6. Déduire alors que $\cos \frac{\pi}{7}$ est solution de l'équation (E) . **1,5 pt**

Exercice 3 : 24 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative

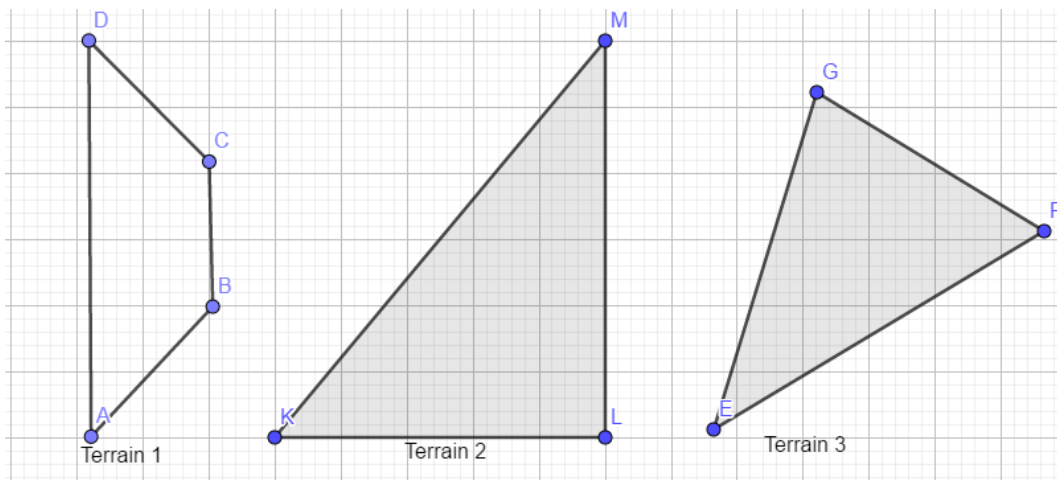
1. Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f . 7 pts
2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ et déduire les asymptotes à (C_f) . 4 pts
3. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . 5 pts
4. Dresser le tableau de variation de f . 4 pts
5. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les différents axes de coordonnées. 4 pts

Exercice 4 : 21 points

On considère dans le plan (P) un triangle équilatéral ABC de coté b . Soit I le milieu de $[BC]$, O le centre du triangle ABC et $G = \text{bar}\{(A, -m); (B, 2); (C, 3m - 1)\}$.

1. Pour quelles valeurs de m G existe. 1,5 pt
2. On suppose $m = 1$. Soit $E = \{M \in (P) / (-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot \vec{CG} = b^2\}$
 - (a) Faire une figure et placer les points O et G . 3 pts
 - (b) Montrer que le triangle ACG est rectangle en C . 4,5 pts
 - (c) Montrer que $E = \{M \in (P) / \vec{MG} \cdot \vec{CG} = \frac{b^2}{3}\}$ et déduire que $A \in E$. 3pts
 - (d) Déduire que $E = \{M \in (P) / \vec{AM} \cdot \vec{CG} = 0\}$ et caractérisé (E) . 3 pts
 - (e) Construire l'ensemble $F = \{M \in (P) / -MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = \frac{110}{9}b^2\}$. 6pts

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 27 PTS



Mr Pierre possède trois terrains qu'il aimerait mettre en vente comme l'indique la figure ci-dessus. Il aimerait vendre chacun de ses terrains à $15000\text{Fr} \cdot \text{m}^2$. Le terrain 1 a la forme d'un trapèze, dont les points A, B, C et D sont les points images sur le cercle trigonométrique des solutions dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{7}{16}$. Le terrain 2 a la forme d'un triangle rectangle entouré par 4 tours de fils électriques ayant coûté 168000Fr sachant qu'un mètre de fils de fers coute 500Fr avec $MK = 37$. Le terrain 3 a la forme d'un triangle quelconque avec $E(-5, -3)$, $F(4, 5)$ et $G(6, 1)$. On prendra 1 unité pour 10m dans tous l'exercice.

Taches : Combien récoltera Mr Pierre pour la vente du :

- | | |
|----------------------------|--------------|
| Tache 1 : terrain 1 | 9 pts |
| Tache 2 : terrain 2 | 9 pts |
| Tache 3 : terrain 3 | 9 pts |