

Epreuve de Mathématiques
 Examineur : M. TEBAYA Ambroise

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/ (15,5 points)

Exercice 1 / (04,5 points)

On considère dans \mathbb{C} , le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + z^2 - (1 + i)z + 2 - 2i$

1. Démontrer que P admet une racine réelle α que l'on déterminera. 0,5pt
2. Démontrer que P admet une racine imaginaire pure β que l'on déterminera. 0,5pt
3. Déterminer le réel γ tel que : $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$ 0,5pt
4. On désigne par P, Q et R les points du plan complexes d'affixes définie respectivement par: $z_P = -2$; $z_Q = -i$ et $z_R = 1 + i$
 - a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_Q - z_P}{z_Q - z_R}$ 0,75pt
 - b. En déduire la nature du triangle PQR. 0,25pt
5. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 2 - i$ et z_0 est le nombre complexe définit par $z_0 = 1 + 2i$.
 - a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s . 0,5pt
 - b. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y 0,75pt
 - c. Déterminer une équation de la droite (D') image de la droite (D) d'équation $y = -2x + 3$ par s . 0,75pt

Exercice 2 / (04,5 points)

(u_n) et (v_n) désigne les suites numériques définies sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et

$v_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$ où \ln désigne le logarithme népérien.

1. Calculer V_0 0,25pt
2. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. 0,75pt
3. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . 1,25pt
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$ 0,75pt
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1}$.
 Calculer S_n puis T_n en fonction de n . 1,5pt

Exercice 3 / (06,5 points)

Les parties I et II sont dépendantes

I. Dans cette première partie, on considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$g(x) = x \ln x - x + 1$. On appelle (C_g) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé d'unité 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

1. Etudier les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$ 0,5pt
2. Calculer $g(1)$ puis dresser le tableau de variation de g 0,75pt
3. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$. 0,25pt
4. Calculer l'aire en cm^2 du domaine $\Delta = \left\{ M \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right), 1 \leq x \leq e; g(x) \leq y \leq \ln x \right\}$ 0,75pt

II. L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln(x)$. On appelle (C_f) sa courbe représentative dans le même plan rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$. **0,5pt**
- b. Montrer que, pour tout x dans $]0; +\infty[$ on a $f'(x) = -\frac{g(x)}{x(x-1)^2}$ **0,75pt**
- c. En déduire le tableau de variations de f . **0,5pt**
- d. Construire (C_f) . **0,75pt**
- e. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha \in]3,5 ; 3,6[$. **0,75pt**
2. On pose $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
 - a. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet aussi α comme solution. **0,5pt**
 - b. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + 1$ **0,5pt**
 - c. Montrer que pour tout x dans $[3; 4]$ on a $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$ **0,5pt**
3. On pose pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |u_n - \alpha|$ **0,5pt**
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. **0,75pt**
 - c. Montrer que la suite (u_n) converge vers α . **0,25pt**
 - d. Déterminer l'entier naturel p tel que le nombre u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/

(04,5 points)

Dans une ville d'architectures futuristes, les réservoirs d'eau potable sont des cylindres « habillés » par des cônes métalliques de hauteur h et de rayon de base R . On en donne une représentation en perspective. Le cylindre droit, qui contient l'eau, est à l'intérieur du cône. Le cône et le cylindre ont même plan de base et même axe. Le cercle qui est le bord de la base supérieure du cylindre droit est inclus dans le bord du cône.

Soit S le sommet du cône, O le centre de la base inférieure du cylindre et O' le centre de base supérieure. Soit A un point du plan de base du cône appartenant au bord du cône. Soit B le point d'intersection du cylindre et du segment $[SA]$.

On effectue une section du réservoir par un plan vertical contenant S, O et A .

On désigne par x la hauteur OO' du cylindre et par r le rayon de base du cylindre.

Ambroise assistant dans un cabinet d'architecture a démontré que $r = \frac{R(h-x)}{h}$ et que le volume V du cylindre exprimer en fonction de x, R et h est

$$V = \frac{\pi R^2}{h^2} (x^3 - 2hx^2 + h^2x)$$

1. Prouver que Ambroise a effectivement bien fait ses démonstrations. **1,5pt**
2. En prenant la hauteur $h = 60\text{m}$ et le rayon $r = 30\text{m}$ étudier les variations de V **1,5pt**
3. Déterminer la hauteur x du cylindre en mètres, pour laquelle le volume est maximal puis calculer alors en mètres cubes ce volume maximal. **1,5pt**

