

Epreuve de Mathématiques
Examineur : M. TEBAYA Ambroise

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/

(15,5 points)

EXERCICE 1/

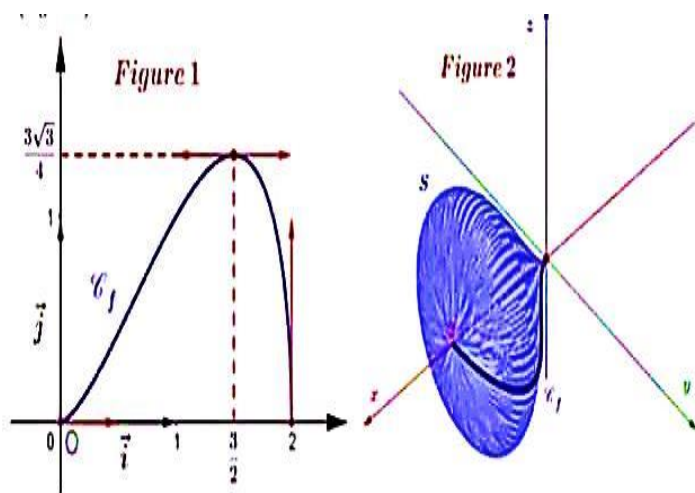
(04 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1 ; 46]$.

1. On considère l'équation (E): $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E). 0,25pt
 - b. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E). 0,5pt
 - c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1[47]$. 0,5pt
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
 - a. Montrer que si $ab \equiv 0[47]$ alors $a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$. 0,5pt
 - b. En déduire que si $a^2 \equiv 1[47]$ alors $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$. 0,5pt
3. a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1[47]$. 0,75pt
 Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1[47]$.
 Par exemple : $inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1[47]$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1[47]$,
 $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1[47]$.
 b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$? 0,5pt
 c. Montrer que $46! \equiv -1[47]$. 0,5pt

EXERCICE 2 /

(07,5 points)



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm. La figure 1 est la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$. La rotation de (C_f) au tour de l'axe $(O, \vec{i})$ engendre un solide S ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2. On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_0^1 (1 - x^n) \sqrt{1 - x^2} dx$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{cases} I_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\ I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2} dx \end{cases}$$

1. Par lecture graphique, déterminer : $f'(\frac{3}{2})$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$ 0,75pt
2. Dresser le tableau de variation de f 0,25pt
3. On note D le domaine plan délimité par (C_f) , les axes du repère et la droite d'équation $x = 2$. Calculer l'aire du domaine D. 0,75pt
4. Calculer le volume V du solide S 0,75pt
5. Soit G la fonction définie par $G(x) = \int_0^x t \sqrt{2t - t^2} dt$
 - a. Démontrer que G est dérivable sur $[0; 2]$ puis calculer la dérivée G' de G . 0,5pt
 - b. Démontrer que f est une bijection de $[0; 2]$ vers un intervalle K à préciser 0,5pt
6. Soit H la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par $H(x) = G(1 + \sin x)$
 - a. Montrer que H est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et que $H'(x) = \cos^2 x + \sin x \cos^2 x$ 0,75pt

- b. Calculer $H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et déduire que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], H(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{\pi}{4}$. **0,75pt**
7. a. Calculer J_0, J_1 et I_1 puis interpréter géométriquement le résultat de I_1 . **1,5pt**
 b. Etudier le sens de variations de la suite (J_n) **0,5pt**
 c. Déduire que les suites (I_n) et (J_n) convergent. **0,5pt**
 d. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$ **0,5pt**
 e. Déduire les limites des suites (I_n) et (J_n) . **0,5pt**
8. a. Démontrer que la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ **0,5pt**
 b. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\forall n \geq 3, (n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}$ **0,75pt**

EXERCICE 3 /

(04 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. (Unité graphique : 1cm). On note A, B et C les points d'abscisses respectives $2i, -1 + 4i$ et $5 + 2i$.

On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie s d'axe (AB) et la transformation $f = tos$. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f .

- Calculer les abscisses de A' et B' , puis placer les points A, B, C, A' et B' dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ **0,75pt**
- On rappelle que l'écriture complexe d'un antitéllement est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$. A tout point $M(z)$, on associe le point $M'(z')$.
 - Justifier que f est un antitéllement **0,25pt**
 - Démontrer que $z' = -\frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$ **0,5pt**
 - Déterminer l'ensemble des points invariants par f **0,5pt**
 - La transformation f est-elle une symétrie orthogonale ? **0,5pt**
- Soit le point $D(3 + 6i)$, (Δ) la médiatrice de $[BD]$ et s' la symétrie d'axe (Δ) .
 - Montrer que les droites (Δ) et (AB) sont parallèles ; puis déterminer sos' **0,75pt**
 - Montrer que $f \circ s'$ est une translation notée t' de vecteur $\overrightarrow{DC}$; et en déduire l'expression de f en fonction de t' et s' . **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/

(04,5 points)

Afin de crypter ou coder et décoder des messages dans une banque, on utilise un chiffrement affine. La banque dispose d'une table de conversion des lettres dont chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un nombre x est associé à la lettre à coder puis on détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine). Exemple : M correspond à $x = 12$; $7 \times 12 + 5 \equiv 11[26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codé par la lettre L. Sur le manuel d'utilisation de la machine qui gère le codage et le décodage du gestionnaire de la banque est inscrit le système codage-décodage : $y \equiv 7x + 5[26]$ équivaut à $x \equiv 15y + 3[26]$.

Le coffre-fort de la banque admet un code d'ouverture. Sur le manuel d'utilisation de la machine qui gère le décodage du coffre-fort, est inscrit le code d'ouverture de la forme ab où le nombre a s'écrit $\overline{47}$ en base x et $\overline{53}$ en base y puis le nombre b s'écrit $\overline{144}$ en base x et $\overline{171}$ en base y .

- Le gestionnaire de cette banque veut envoyer de façon codée le mot «AMBROISE» à un autre gestionnaire. Coder ce mot afin que ce mot soit un mot secret. **1,5pt**
- Le gestionnaire de cette banque vient de recevoir par la boîte e-mail de sa machine le mot « EZVFPJQCLH ». Décoder ce mot afin de savoir ce que signifie le message. **1,5pt**
- Déterminer le code de ce coffre-fort **1,5pt**