COLLÈGE DE LA RETRAITE
2nd CYCLE SCIENTIFIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021
DURÉE : 4H COEF. : 4
CLASSE : Tle D/TI

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

2ème Période

L'épreuve comporte trois exercices d'évaluation des réssources et un problème d'intégration portés sur deux pages.

Partie A: Evaluation des ressources: 15 points

Exercice 1: 4 points

Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1) Ecrire Z sous forme algébrique. **0,5pt**

2) Déterminer le module et un argument de z_1, z_2 et Z, **1,5pt**

3) En déduire les valeurs éxactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. **0,5pt**

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2cm. Placer le point B puis placer les points A et C d'affixes respectives z_1, z_2 et Z à l'aide d'une règle et d'un compas. (on laissera apparaître les trais de construction) **1pt**

5) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2017}. **0,5pt**

Exercice 2: 6 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère ortonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2 + 3i$ et $1 - i$.

1) Placer les points A, B, C et D dans le plan et montrer que le quadrilatère ABCD est un parallelogramme. **1pt**

2) On considère les équations :

$(E_1) : z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i = 0$ et $(E_2) : z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i = 0$

a) Montrer que (E_1) admet une solution réelle z_1 et (E_2) admet une solution imaginaire pure z_2. **1pt**

b) Développer et réduire $(z - 3)(z + 2 - 3i)$ puis $(z - 4i)(z - 1 + i)$. **0,5pt**

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i)(z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i) = 0$ **1pt**

d) On note $z_0 = 1 - i$. Donner la forme trigonométrique de z_0^n pour tout entier naturel n. **0,5pt**

e) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que les points M_n d'affixe z_0^n soient sur la droite d'équation $y = 0$. **0,5pt**

3) On note f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i$

a) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. **1pt**

b) Montrer que l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que M' appartiennent à l'axe des abscisses est l'hyperbole d'équation $y = \frac{3x-9}{2x-1}$. **0,5pt**

Exercice 3: 5 points

1) On considère les applications r qui à un point M du plan d'affixe $z = x + iy$ associe le point M_1 d'affixe $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})z$ et h qui au point M_1 associe le point M' tel que $z' = 2z_1$

a) Déterminer l'écriture complexe de $s = h \circ r$. **0,5pt**

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r et h. **1pt**

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de s. **0,5pt**

d) On pose $z' = x' + iy'$. Ecrire x' et y' en fonction de x et y **0,5pt**

e) Déterminer l'équation cartésienne de l'image de la droite d'équation $y = x$ par l'application s . **1pt**

2) Soit E le point d'affixe $Z_E = 1$, F l'image de E par r et G l'image de F par r.

a) Déterminer les formes exponentielles de Z_F et Z_G affixes respectives des points F et G. **0,5pt**

b) Montrer que $\frac{e^{\frac{4\pi}{3}i}-1}{e^{\frac{2\pi}{3}i}-1} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ et en déduire que le triangle EFG est équilateral. **0,5pt**

c) Montrer que les points E, F, G et H d'affixe $Z_H = -i$ sont cocycliques(on pourra montrer que ces points sont équidistands de l'origine du repère). **0,5pt**

Partie B: Evaluation des compétances: 4,5 points

Le modéle complexe d'un signal sinusoidal en fonction du temps d'expression $x(t) = x_{max}sin(\omega t + \phi)$ est $\underline{x} = x_{max}e^{i\phi} = x_{max}(\cos\phi + i\sin\phi)$ (ω est la pulsation, $|\underline{x}| = x_{max}$ est son module et ϕ la phase initial du signal ou argument de $\underline{x}$). On considère un circuit électrique où sont montés en série un générateur de courant alternatif dont l'intansité (en ampère) $i(t)$ est la partie réelle des solutions de l'équation complexe $Z^2 - (0,4\sin(\omega t))Z + 1 = 0$, un resistor de résistance constante R, un condansateur de capacité C et une bobine d'inductance L. Les différences de potentiel (en volt) aux bornes des trois recepteurs est respectivement $u_1(t) = 0,2R\sin(\omega t)$, $u_2(t) = \frac{0,2}{C\omega}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ et $u_3(t) = 0,2L\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Il y additivité des tensions.

Tâches: (On utilisera les modèles complexe pour les tâches 2) et 3)

1) Déterminer l'expression de l'intensité du courant qui alimente ce circuit. **1,5pt**

2) Déterminer la valeur maximale de la différence de potentiel $u(t)$ aux bornes du gérateur en fonction de R, L, C et ω. **1,5pt**

3) Déterminer l'expression du rapport $Z = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|}$ appelé impédance du circuit. **1,5pt**

Présentation: **0,5pt**