

PARTIE B : (évaluation des ressources) /15, 5 pts

EXERCICE1 / 3, 5 pts

On se propose de résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(E): z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0.$$

- 1) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E) . **1pt**
- 2) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z ,

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$$
 1pt
- 3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$. **1pt**
- 4) En déduire les solutions de (E) . **0,5pt**

EXERCICE 2 / 4 pts

Dans cette partie x et y désignent des entiers naturels non nuls tels que $x < y$. S est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $\text{pgcd}(x; y) = y - x$

1. a) Calculer $\text{pgcd}(363; 484)$. Le couple $(363; 484)$ appartient-il à S ? **1pt**
 b) Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n; n + 1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse. **0,75pt**
2. a) Montrer que $(x; y) \in S$ si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$. **1pt**
 b) En déduire que pour tout couple $(x; y)$ élément de S , on a :

$$\text{ppcm}(x; y) = k(k + 1)(y - x).$$
 0,5pt
3. a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228. **0,25pt**
 b) En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ de S tels que $\text{ppcm}(x; y) = 228$. **0,5pt**

EXERCICE 3 / 3 pts

Calculer les limites suivantes :

1pt \times 3

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - 2x$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 3\sqrt{x-1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

EXERCICE 4 / 5 pts

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : **0,75pt** \times 2
 - a) $z + 2\bar{z} = 1 - i$
 - b) $z^2 - 2iz - 2 = 0$
- 2) On considère le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$
 - a) Donner l'écriture exponentielle de a^2 . **1,5pt**
 - b) En déduire l'écriture exponentielle de a . **1pt**
 - c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$. **1pt**

PARTIE B : (évaluation des compétences) /4, 5 pts

Dans le but de protéger la confidentialité de ses échanges, une agence de renseignement a contacté un informaticien pour mettre sur pied un procédé de codage d'informations et voudrait que vous l'expérimentez afin de confirmer les

données de cet informaticien. Son apport stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25. Ensuite son procédé de codage continu ainsi :

Étape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p .

Étape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Mais voulant montrer ce de quoi il est capable, un autre employeur propose qu'à l'étape 2, p soit le reste de la division euclidienne de $(101^2)^m$ par 26.

Tâches :

- 1) Coder l'expression **un matheux** selon le procédé de l'informaticien. *1,5pts*
- 2) Décoder l'expression **TD** selon le procédé de l'informaticien. *1,5pts*
- 3) Décoder la lettre **O** selon le procédé proposé par l'autre employeur. *1,5pts*

« Un travail opiniâtre vient à bout de tout »