

Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie.

PARTIE 1. EVALUATIONS DES RESSOURCES

[15,5pts]

EXERCICE 1.

[3,5pts]

1. Démontrer par récurrence que :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+a)} = \frac{1}{a \cdot a!} - \frac{n!}{a \cdot (n+a)!}, \quad a \in \mathbb{N}^*. \quad [1pts]$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}. \quad [0,75pts]$$

2. Soit n un entier naturel. On pose $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. Démontrer que n possède un nombre impair de diviseur si et seulement si n est un carré parfait. [1pts]

3. Résoudre dans \mathbb{Z} le système : $\begin{cases} x \equiv 1[3], \\ x \equiv 2[7]. \end{cases}$ [0,75pts]

EXERCICE 2.

[5,5pts]

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $1665x + 1035y = 45$. [0,75pts]

2. Résoudre dans \mathbb{N}^2 le système : [0,75pts]

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7344, \\ \text{pgcd}(x, y) = 12. \end{cases}$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) En utilisant la relation de Bezout, montrer que : [0,5pts]

$$\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}(a, a+b) = \text{pgcd}(b, a+b) = 1.$$

(b) Montrer par l'absurde que $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}(a+b, ab) = 1$. [0,5pts]

(c) On pose $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ et $\mu = \text{ppcm}(a, b)$. En déduire que $\text{pgcd}(a+b, \mu) = \delta$. [0,5pts]

4. Soient deux entiers non nuls $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$. Montrez qu'alors $\sqrt[m]{n} \in \mathbb{N}^*$ [0,5pts]

5. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier. [0,75pts]

6. On donne $A = 2^n p$, $p \geq 3$, p premier et $B = 9 \times 10^n$

(a) Déterminer n pour que B admette 27 diviseurs. [0,5pts]

(b) Montrer que A est parfait si et seulement si $p = 2^{n+1} - 1$; [0,75pts]

EXERCICE 3.

[3pts]

I) Soit le polynôme défini dans \mathbb{C} par : $P(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1$.

1. Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$, pour tout nombre complexe z . [0,5pt]

2. Montrer que si z_0 est racine de $P(z)$ alors \bar{z}_0 , $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\bar{z}_0}$ sont aussi des racines de $P(z)$. [1pt]

3. Calculer $P(-1+i)$. [0,5pt]

4. En déduire la résolution dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$ et donner les solutions sous la forme exponentielle. [0,75pt]

II) Soit le nombre complexe $Z = \frac{2z-4}{z-i}$. Posons $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

1. Déterminer et construire l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que Z soit un nombre réel. [0,5pt]
2. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que Z soit un imaginaire pur. [0,5pt]

EXERCICE 4.

[3,5pts]

L'unité de longueur est le centimètre. L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1; 2; 0); B(0; 6; 2); C(-1; 0; -6); D(4; 0; -2)$ et $H(2; -1; -1)$. On désigne par L, K, J les centres de gravité respectifs des faces BDC, ACD et ADB .

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan. [0,25pt]
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) . [0,5pt]
3. Calculer l'aire du triangle ABC . [0,5pt]
4. Montrer que les points A, B, C et D définissent un tétraèdre; puis calculer le volume de ce tétraèdre. [0,5pt]
5. Démontrer que (ABC) et (LJK) sont parallèles. [0,5pt]
6. Préciser le sens de la base $(\vec{KL}, \vec{KJ}, \vec{AB} \wedge \vec{AC})$. [0,25pt]
7. Soit (S) la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$.

On désigne par R le projeté orthogonal de D sur le plan (LKJ) .

- (a) Montrer que les points H, R et D sont alignés, et que $\vec{DR} = \frac{2}{3}\vec{DH}$. [0,5pt]
- (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(S) \cap (LJK)$. [0,5pt]

PARTIE 2. EVALUATIONS DES COMPETENCES

[4,5pts]

Un groupe d'élèves du CONODIC organise un voyage d'étude dans la ville de Yaoundé. Ils se rendent dans une agence de la place et réservent un bus qui décide de décoller la nuit. Mais avant le départ, ils s'arrêtent dans un restaurant et dépensent 100 pièces de monnaie. Les hommes du groupe dépensent 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Dans ce restaurant, ils ont trouvé des tables ayant la forme d'un triangle dont les côtés mesurent 1320 décimètres, 15600 centimètres et 20,4 décamètres. On les a fait asseoir autour de cette table de façon à ce qu'il ait une personne à chaque sommet de la table et les personnes soient également espacées.

Au cours du voyage, ils trouvent à un carrefour un phare qui émet un signal jaune toutes les 15 secondes et un signal rouge toutes les 28 secondes. Le signal jaune est aperçu 2 secondes après minuit et le signal rouge 8 secondes après minuit.

Après ce carrefour, le chauffeur décide de s'arrêter pour se reposer et permettre aux passagers de se ressourcer. Le groupe d'élèves va se rendre dans un restaurant une fois de plus. Il y trouve une bande de 17 pirates qui s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur, venant rencontrer DANIEL le cuisinier des lieux. Les pirates décident de se partager également le butin et de donner le reste au cuisinier. DANIEL reçoit alors trois pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. DANIEL le cuisinier recevrait alors quatre pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage laisserait cinq pièces d'or à ce dernier.

Tâche 1 :

Déterminer le nombre de tables minimum qu'il faut dans ce restaurant pour recevoir et faire asseoir cinq groupes de même effectif que celui de ces élèves du CONODIC, si l'on veut que la distance entre deux personnes puisse être exprimée par un nombre entier de mètres? [1,5pt]

Tâche 2 :

A quelle heure les deux signaux jaune et rouge pourraient se voir pour la première fois être émis en même temps? [1,5pt]

Tâche 3 :

Quelle est la fortune minimale que peut espérer DANIEL le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste de pirates? [1,5pt]

Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen (Albert Einstein) !!!!! Bon courage !!!!!!!