EVALUATION HARMONISEE N°3 DE MATHEMATIQUES

Evaluation des ressources 15.5pts

Exercice 1 : 5pts

I. **OABCDEFG** est un cube. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. α est un réel strictement positif. Les points L, M et K sont définis par $\overrightarrow{OL} = \alpha\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BF}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$ en fonction de α **0.5pt**
2. En déduire l'aire du triangle DML **0.5pt**
3. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DML). **0.5pt**

II. E désigne l'espace euclidien de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Φ désigne l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ associe le vecteur $\Phi(\vec{u}) = (x + 2y)\vec{\imath} + (-y + z)\vec{\jmath} - (x + 2z)\vec{k}$

1. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$. **0.5pt**
2. **a.** Déterminer le noyau $ker\Phi$ de Φ (on donnera une base) **0.75pt**
   b. Sans déterminer $Im\Phi$, en déduire sa dimension. **0.25pt**
   c. Déterminer $Im\Phi$ et une base de $Im\Phi$. **0.5pt**
3. Déterminer la matrice de $\Phi o \Phi$ dans la base $\mathcal{B}$. **0.5pt**
4. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3} = \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.
   a. Démontrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de E. **0.5pt**
   b. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}'$. **0.5pt**

Exercice 2 : 5.5pts

1. Soit h la fonction définie sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ par $h(x) = x\sqrt{1-2x}$. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction H définie sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ par $H(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-2x}$ soit une primitive de h. **1pt**
2. Soit φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ telle que $\varphi(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
   a. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ **0.75pt**
   b. En déduire la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$ **0.5pt**
3. k désigne la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $k(x) = \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$
   Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $k(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ puis en déduire la primitive K de k telle que $K(-1) = -ln2$ **1.25pt**
4. Soit x, y et z trois nombres complexes de module 1 tels que $x + y + z = 1$ et $xyz = 1$.
   a. Démontrer que l'on a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ **0.5pt**
   b. Calculer x, y et z. **0.5pt**
5. Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe $Z = 16\sqrt{2}(-1 + i)$ **1pt**

Exercice 3 : 5pts

I. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ $f(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$

1. Déterminer les limites f aux bornes de son domaine de définition. **0.5pt**
2. Dresser le tableau de variation de f **1pt**
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α telle que $3{,}9<\alpha<4$ **0.75pt**
4. Calculer $f(0)$ et donner le signe de f suivant les valeurs de x. **0.5pt**

II. La fonction g est définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si \quad x>0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0. **0.5pt**
2. Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\,f(x)$ **0.5pt**
3. Dresser la tableau de variation de g **0.5pt**
4. Construire la courbe de g dans le repère orthogonal d'unité 1cm sur (OI) et 10cm sur (OJ). **0.75pt**

EVALUATION DES COMPETENCES 4.5pts

M. TCHOUAWI est invité à la base navale de la ville de Douala. Il fait des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit à l'hébergement A coûte 12 000 frs et une nuit à l'hébergement B coûte 22 500 frs. Il se rappelle que le coût total de sa réservation dans les deux types d'hébergement est de 219 000 frs et qu'il aurait passé au maximum 13 nuits à l'hébergement A.

La base navale comprend une piste d'athlétisme qui est un terrain délimité par les cercles (C_1) et (C_2) tels que (C_1) est le cercle de centre I d'affixe $z_I=\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ et de rayon $\sqrt{2}$. (C_2) est l'image de (C_1) par la similitude directe s d'écriture complexe $z'=(-1+i)z+2i$. **M. TCHOUAWI** voudrait estimer la superficie de cette piste d'athlétisme.

Le camp d'armement peut être assimilé à un plan (ABC) de sorte que si on munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ soit un repère du plan, alors $A(1,2,3)$, $B(-1,3,1)$ et $C(2,-1,2)$. Une caméra y est fixé en un point K, point d'intersection du plan (ABC) et de la droite dont un système d'équation cartésienne est $\begin{cases}-4x+7y=4\\ 5x+7z=9\end{cases}$ Intrigué, **M. TCHOUAWI** voudrait savoir en quel point K est fixé cette caméra.

1. Déterminer le nombre d'hébergements passés dans chacun des deux types d'hébergement **1.5pt**
2. Aider **M. TCHOUAWI** à estimer la superficie de la piste d'athlétisme **1.5pt**
3. Déterminer les coordonnées du point K **1.5pt**