Ministère des Enseignements Secondaires
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA
TEL : 233 46 40 75
Mle.7HH1GSFD112218074
Profs : T. N. AWONO MESSI & NGOH DOOH G.

Année scolaire : 2020-2021
Classe : T^le C
Durée : 4h Coefficient : 7
Mercredi, 25 Novembre 2020

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°2 DU 1er TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : (4,5 points)

1. **(a)** Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 23x-17y=6$. **0,75pt**

   (b) Déduis-en les entiers naturels A inférieurs à 1000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par 17, le reste soit 8. **0,5pt**

2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \geq b$. On pose $\delta = PGCD(a;b)$ et $\mu = PPCM(a;b)$.
   Détermine tous les couples $(a;b)$ vérifiant le système : $\begin{cases} \mu = \delta^2 \\ \mu + \delta = 156 \end{cases}$ **1pt**

3. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u+13v+23w=0$.

   (a) Montre que pour un tel triplet, $v \equiv w[3]$. **0,5pt**

   (b) On pose $v = 3k+r$ et $w = 3k'+r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leq r < 2$.
   Montre que les éléments de E sont de la forme $(-13k-23k'-12r, 3k+r, 3k'+r)$. **0,5pt**

   (c) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+13y+23z=0$. Détermine l'ensemble des points M à coordonnées (x, y, z) entières relatives appartenant au plan $\mathscr{P}$ et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes. **1,25pt**

EXERCICE 2 : (3 points)

Soient (x_n) et (y_n) les suites définies par $x_0 = 1, y_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$

Soit (Δ) la droite d'équation $5x-y+3=0$ et M_n les points de coordonnées (x_n, y_n).

1. Montre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}, M_n \in (\Delta)$ et déduis-en que $x_{n+1} = 4x_n + 2$. **1pt**
2. Montre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{N}$ et $y_n \in \mathbb{N}$. **0,5pt**
3. Montre que x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3. **0,75pt**
4. Montre que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux. **0,75pt**

EXERCICE 3 : (5 points)

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1. Montre que pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. **0,5pt**

2. **(a)** Etudie les variations de g sur $\mathbb{R}$ et dresse son tableau de variations. **0,5pt**

   (b) Déduis-en que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\lambda \in]0;1[$. **0,5pt**

3. Dresse le tableau des variations de la fonction f. **1pt**

4. On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : $3cm$), par I et J les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives -1 et 1.

   (a) Vérifie que la droite (IJ) est la tangente en J à $\mathscr{C}$. **0,5pt**

   (b) Ecris une équation de la tangente (T) en I à $\mathscr{C}$ et étudie leurs positions relatives. **0,75pt**

   (c) Construis soigneusement $\mathscr{C}$. On prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur approchée de λ. **0,75pt**

5. Détermine les primitives F de f sur $]0;+\infty[$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (2,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique : $2cm$)
On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. A tout point M d'affixe z, distinct de A et B, est associé le point M' d'affixe Z définie par $Z=\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$. On pose $z=x+iy$ où $x,y\in\mathbb{R}$.

1. Montre l'égalité $Z=\frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2}-i\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$. **1pt**
2. Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z telle que $Z\in i\mathbb{R}$. **0,5pt**
3. Détermine l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z telle que $\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=4$. **0,5pt**
4. Montre que $Z\in\mathbb{R}^*$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

M. HASSAN est un astronome et loue une maison à partir du **1er Janvier 2020**. Il a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 480.000 **FCFA** et **M. HASSAN** s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes.

- ✓ **Contrat N° 1** : Il accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente ;
- ✓ **Contrat N° 2** : Il accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 30.000 **FCFA** du loyer de l'année précédente.

Dans le cadre de son travail, **M. HASSAN** a observé au jour J_0 une comète A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0+6), il a observé une comète B dont la période d'apparition est de 81 jours. Il appelle J_1 le jour de la prochaine apparition **simultanée** des deux comètes à ses yeux.

<u>Tâches</u> :

1. Calcule la somme payée à l'issue des neuf années avec le **contrat N° 1**. **1,5pt**
2. Calcule la somme payée à l'issue des neuf années avec le **contrat N° 2**. **1,5pt**
3. Calcule le nombre de jours qui s'écouleront entre J_0 et J_1. **1,5pt**

Présentation : **0,5pt**