Ministère des Enseignements Secondaires
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA
TEL : 233 46 40 75
Mle.7HH1GSFD112218074
Profs : T. N. AWONO MESSI & NGOH DOOH G.

Année scolaire : 2020-2021
Classe : T^{le} C
Durée : 3h   Coefficient : 7
Mercredi, 11 Novembre 2020

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°1 DU 1er TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 :   3,5 points

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1.$ **0,5pt**
2. Calcule $PGCD(x_{2020}; x_{2021})$. Qu'en conclure ? **0,5pt**
3. **(a)** Démontre que, $\forall n \in \mathbb{N}, 2x_n - y_n = 5.$ Exprime y_n en fonction de $n.$ **0,75pt**
   (b) Etudie suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par $5.$ **0,75pt**
4. On pose $\delta_n = PGCD(x_n; y_n)$ pour tout entier naturel $n.$
   (a) Démontre que l'on a : $\delta_n = 1$ ou $\delta_n = 5.$ **0,5pt**
   (b) Déduis-en l'ensemble des entiers naturels n tels que $\delta_n = 1.$ **0,5pt**

EXERCICE 2 :   (4 points)

1. **(a)** Soit p un entier naturel. Montre que l'un des trois nombres $p, p+10$ et $p+20$, et un seulement, est divisible par $3.$ **1pt**
   (b) Les entiers a, b et c sont, dans cet ordre, les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison $10.$ Détermine a, b et c sachant qu'ils sont premiers. **1pt**
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $A_n = 3^{2n} - 2^n$ et $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$
   (a) Démontre par récurrence que A_n est multiple de $7.$ **0,75pt**
   (b) Démontre par congruence que B_n est multiple de $7.$ **0,75pt**
   (c) Déduis-en que les nombres $3^{28} - 2^{14}$ et $3^{83} + 2^{43}$ ne sont pas premiers entre eux. **0,5pt**

EXERCICE 3 :   (3 points)

1. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{D}$ est la droite d'équation cartésienne $2x + y - 20 = 0.$ Détermine l'ensemble E des points de $\mathscr{D}$ à coordonnées entières. **1pt**
2. Le parking d'un Lycée n'a que des motos et des voitures. Un matin, **HASSAN** élève en classe de **T^{le} C** affirme avoir dénombré 40 roues dans ce parking, mais ne se souvient pas du nombre de motos ou de voitures.
   Aide-le à retrouver le nombre de motos et le nombre de voitures. **1pt**
3. Détermine tous les nombres entiers N qui s'écrivent $N = \overline{a00b}$ en base 10 et qui sont multiples de $7.$ **1pt**

EXERCICE 4 : (4,5 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N}$ où f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Construis soigneusement la courbe $\mathscr{C}$. **0,5pt**
2. Place les quatre premiers termes de la suite (U_n). Quelle conjecture peux-tu émettre pour la suite (U_n) ? **1pt**
3. **(a)** Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$. **0,5pt**

   (b) Montre que la suite (U_n) est décroissante. Qu'en conclure ? **0,75pt**
4. **(a)** Vérifie que $U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n - 1}{1+\sqrt{U_n}}$ et déduis-en que $U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(U_n - 1)$. **0,5pt**

   (b) Déduis-en que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - 1| \leq \dfrac{3}{2^n}$. **0,5pt**

   (c) Montre que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n > \eta \Longrightarrow |U_n - 1| < \varepsilon$. **0,5pt**

   (on admettra que $\forall x, a > 0, x^n = a \Rightarrow n = \dfrac{\ln a}{\ln x}$.)

   (d) Que peut-on conclure pour la suite (U_n)? **0,25pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

AYISSI, **TIKI** et **DIKA** ont trois façons différentes de préparer leurs études universitaires. Chacun d'eux modélise son épargne par une formule afin de connaître en temps réel la somme dont il dispose dans son compte.

- ✓ Pour **AYISSI**, son solde initial est de 100.000 **FCFA** et chaque année, son compte est crédité du solde de l'année précédente augmenté de 30% de son solde initial. Il affirme qu'avec la formule $A_n = 5000(n+1)(20+3n)$, il peut connaître son solde à chaque $n^{ième}$ année ;
- ✓ **TIKI** quant à lui opte pour un solde initial de 150.000 **FCFA** et chaque année, son compte est crédité du solde de l'année précédente multiplié par $0,25$. Il affirme qu'avec la formule $T_n = 200.000\left[1-(0,25)^{n+1}\right]$, il peut connaître son solde à chaque $n^{ième}$ année ;
- ✓ **DIKA** opte pour un dépôt initial de 50.000 **FCFA** et à partir de l'année qui suit immédiatement celle de son dépôt, son compte est crédité de son solde initial multiplié par le cube de la $n^{ième}$ année d'épargne. Il affirme qu'avec la formule $D_n = 50.000 \times \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, il peut connaître son solde à chaque $n^{ième}$ année.

<u>**Tâches**</u> **:**

1. Démontre la véracité de la modélisation de **DIKA**. **1,5pt**
2. Démontre la véracité de la modélisation de **TIKI**. **1,5pt**
3. Démontre la véracité de la modélisation d'**AYISSI**. **1,5pt**

   Présentation : 0,5pt