Département de Mathématiques **Année scolaire : 2020-2021**
Classe : T$^{\text{Le}}$C **Devoir N^o1 Durée : 4 h Coef : 7**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 ***2,75 points***

Soient a, b, m et n des entiers naturels tels que $mn \neq 0$. Soit à résoudre le système d'équation $(\sum)$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

$(\sum) : \begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[m] \end{cases}$ *, avec $\mathcal{S}$ l'ensemble solution de $(\sum)$.*

1. *Montrer que le $pgcd(m, n)$ divise $(b - a)$ si et seulement si $S \neq \varnothing$.* ***1pt***
2. *Soit $x_0 \in \mathcal{S}$, montrer que $\mathcal{S} = \{x_0 + ppcm(m, n)k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.* ***0,75pt***
3. *Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :*

   a) $(\sum_1) : \begin{cases} x \equiv 5[25] \\ x \equiv 3[20] \end{cases}$ *, b)* $(\sum_2) : \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[2] \end{cases}$. ***0,5***$\times 2$ ***pt***

EXERCICE 2 ***5,25 points***

Les parties I, II et III sont toutes indépendantes.

I-Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x^2 divise $(x + 1)^n - nx - 1$. ***0,75pt***

II- On aimerait trouver l'ensemble $\mathcal{P}$ de tous les nombres premiers tels que pour tout $p \in \mathcal{P}$, $2^p + p^2$ est aussi premier.

1. *Vérifier qu'il existe un nombre premier p pour lequel $2^p + p^2$ est premier.* ***0,25pt***
2. *Montrer que pour tout p nombre premier, $p \geq 5$, $2^p + p^2$ est divisible par 3.* ***0,75pt***
3. *En déduire l'ensemble $\mathcal{P}$.* ***0,25pt***

III-L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. *Exprimer S en fonction de p.* ***0,25pt***
2. *Démontrer que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.* ***0,5pt***
3. *On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.*

   Sachant que l'intervalle $]m; m + 2[$, $\forall m \in \mathbb{N}$ contient un et un seul entier, l'entier $m + 1$;

   a)Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2.) ***0,75pt***

   b)Exprimer n en fonction de p. ***0,5pt***

   c)Établir que p vérifie la relation : $3 + 2p - p^2 = 0$ (On utilisera le fait que $4S = 4n^2$) ***0,75pt***

   d)Déduire de c) p et puis n ***0,5pt***

EXERCICE 3 ***7,5 points***

Les parties I, II et III sont toutes indépendantes.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I- Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, déterminer en fonction θ le module et un argument du nombre complexe $Z = \dfrac{1 + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + e^{5i\theta}}{e^{2i\theta} + e^{4i\theta}}$. ***1pt***

II- Soit A le point d'affixe $-i$. On considère l'application f de $P/\{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P/\{A\}$ d'affixe z, associe le point $f(M) = M'$ d'affixe z' telle que :

$z' = \dfrac{i\overline{z}}{i - \overline{z}}$.

1. *Déterminer l'ensemble des points invariants par f.* ***0,5pt***

2. *a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}/\{i\}$, $(z'+i)(\overline{z}-i)=1$.* **0,5pt**

   b. En déduire que $AM' \times AM = 1$ et que $M' \in [AM)$. **0,5pt**

3. *a. Soit $\theta \in \mathbb{R}/\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,*

   Montrer que l'affixe de $f(M)$ est égale à $e^{i\theta}$ si et seulement si, $z=-\frac{1}{2}\left(tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right)$. **0,75pt**

   b. Résoudre dans l'équation $z^3=1$. **0,5pt**

   c. En déduire les solutions de l'équation $iz^3=(-i-z)^3$. **0,75pt**

III- Soit (E) : $z^2-2e^{i\alpha}z+2e^{2i\alpha}=0$ une équation d'inconnue z, et α un réel de $[0,\pi]$.

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).* **0,5pt**
2. *Mettre les solutions sous la forme exponentielle.* **0,5pt**
3. *On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_1=(1-i)e^{i\alpha}$, $z_2=(1+i)e^{i\alpha}$.*
   Montrer que $\frac{z_1}{z_2}=-i$, puis en déduire la nature exacte du triangle AOB **0,5pt**
4. *a. Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) \equiv \alpha+\frac{\pi}{2}[2\pi]$.* **0,5pt**

   b. Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y=x$. **0,5pt**

   c. Construire A et B pour la valeur de α trouvée. **0,5pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES 4.5 pts

On considère deux entiers naturels a et b tels que $0 \leq a \leq 25$; $0 \leq b \leq 25$. Pour tout entier n, on note $\phi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26. Le couple $(a;b)$ est donc appelé clé.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettres	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettres	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombres	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\phi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\phi(n)$.

Aboubakar choisit une clé $(a;b)$ qu'il a décidé de garder secret pour coder ses mots. Ainsi, il code la lettre F par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

Salamatou quand à elle, choisit le couple $(17;3)$ comme clé pour ses codages.

Taches :

1. Peut-on retrouver la clé de Aboubakar ?
2. Coder le message «GAUSS» à l'aide de la clé de Salamatou.
3. Aider Salamatou a décoder le message «KTGZDO».

"Il est bien plus honorable d'échouer que de tricher"