Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 PTS

Exercice 1 : 03,5 points

1. On considère les points A_0 et A_1 d'affixes respectifs $a_0 = 1$ et $a_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $A_2 = r(A_1)$ (où r est la rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{12}$) , et I le milieu de $[A_0A_2]$.
   (a) Donner les formes exponentielles et algébrique de a_2 affixe de A_2 . **0,5 pt**
   (b) Montrer $z_I = cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$ et déduire que les points O, I et A_1 sont alignés . **0,75 pt**
   (c) Déduire les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$ $((\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3})$. **0,5 pt**
2. Soit l'équations $(E) : z^2 - 2z - 2isin\theta e^{i\theta} = 0$ (avec $\theta \in]0, \pi[$) . z_1 et z_2 les solutions de (E)
   (a) Sans calculer z_1 et z_2 montrer que $arg(z_1) + arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$. **0,5 pt**
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) on montrera que $\Delta = 4e^{i2\theta}$. **0,75 pt**
   (c) Soit les points A , M et N tels que : $z_A = 2$, $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$.
      i. Écrire z_N et z_M sous forme exponentielle . **0,5 pt**
      ii. Déterminer l'ensemble de points M lorsque θ varie dans $]0, \pi[$. **0,25 pt**
      iii. Trouver θ pour que $OMAN$ soit un carré . **0,5 pt**

Exercice 2 : 04 points

1. Déterminer le chiffre des unités de l'entier naturel $N = 7^{7^{7^7}}$. **0,75 pt**
2. On considère la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
   (a) Calculer u_2 , u_3 et u_4 . **0,5 pt**
   (b) Montrer en utilisant la récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$. **0,5 pt**
   (c) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 1$. **0,25 pt**
   (d) Montrer par récurrence sur p , $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+p} = u_nu_{p-1} + u_{n+1}u_p$. **0,75 pt**
   (e) En déduire que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ on a $PGCD(u_n, u_p) = PGCD(u_n, u_{n+p})$. **0,25 pt**
   (f) Montrer que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ on a : $PGCD(u_n, u_m) = u_{PGCD(n,m)}$. **0,5 pt**
   (g) Montrer que $\forall n \geq 5$, si u_n est un nombre premier , alors n est un nombre premier . La réciproque est elle vraie (On donne $u_{19} = 5181$) . **0,75 pt**

Exercice 3 : 05,25 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1$ $I =]0, 2[$, $J = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $A(0; 1)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$. **0,5 pt**
2. Dresser le tableau variation de f et montrer que A est centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$. **0,75 pt**
3. Montrer que f réalise une bijection sur I et que $\forall x \in I$, $f^{-1}(x) = \dfrac{2(x-1)}{x(2-x)}$. **0,75 pt**
4. Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en A et tracer (T) et $(\mathcal{C}_f)$. **1 pt**
5. Soit $F(x) = f(tanx)$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $F(\dfrac{\pi}{2}) = 2$ et $G(x) = F^{-1}(x) + F^{-1}(\dfrac{2}{x})$
   (a) Montrer que f est continue sur J . **0,25 pt**
   (b) Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} définie sur $[1, 2]$. **0,25 pt**
   (c) Montrer que F^{-1} est dérivable et déterminer $(F^{-1})'$. **0,75 pt**
   (d) Calculer $G'(x)$ et déduire que $G(x) = \dfrac{\pi}{2}$. **1 pt**

Exercice 4 : 02,75 points

1. Étudier suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 . **0,5 pt**
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, On pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4S_n = 5^{n+1} - 1$. **0,5 pt**
   (b) Soit $a \in \mathbb{N}$, montrer que $4S_n \equiv a[7]$ si et seulement si $S_n \equiv 2a[7]$. **0,75 pt**
   (c) Déterminer tous les entiers n tels que S_n soit divisible par 7 . **0,5 pt**
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation $(F) : 5^n x + S_n y = 1$.
   (a) Justifier que (F) admet au moins une solution . **0,25 pt**
   (b) Déduire une solution particulière de (F) **0,25 pt**
   (c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (F) . **0,5 pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS

Mr Tchio travail au port de Douala il aimerait faire charger un conteneur ayant la forme d'un pavé droit de dimension $L = 945cm$ et $l = h = 882cm$. Il doit charger ce conteneur par des coffrets en bois de forme cubique d'arête a avec $a \in \mathbb{N}^*$ (les coffrets doivent remplir le conteneur san laisser d'espace vide) . un coffret coute $18000Frs$. Pour des besoins techniques il aimerait connaitre la plus grande valeur possible de a . Son fils **Zobo** élève en classe de **Terminale C** lui dit que la plus grande valeur possible de a est : $a = 63$.
Zobo a une difficulté sur un exercice donné en classe : la détermination et la représentation de l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relations $arg(\overline{z}) \equiv arg(-z)[2\pi]$. Son ami **Fotso** lui dit que l'ensemble cherché est le demi axe des ordonnées constitué de points dont l'affixe est un imaginaire pure de partie imaginaire positive . **Zobo** doute un tout petit peu .

Mr Tchio aimerait se déplacer pour son village situé à $40Km$ d'où il est . Pour se faire il emprunte sa vielle voiture . Afin de ménager son moteur **Mr Tchio** se déplace chaque fois à vitesse constante pour tout déplacement de plus de $5Km$. Pour un déplacement à vitesse constante v et pendant chaque heure , la consommation de carburant en litres de sa voiture est de $0,4+0,001v^2$.

Tache 1 : Zobo a t-il raison par rapport à la valeur de a et combien de coffrets en bois son papa aura t-il au total conteneur . **1,5 pt**
Tache 2 : Fotso a t-il raison par rapport à l'ensemble de points . **1,5 pt**
Tache 3 : Déterminer la vitesse que doit adopter le chauffeur pour une consommation minimale de carburant à l'aller . **1,5 pt**