**Année scolaire 2020-2021** **Situé au groupe scolaire bilingue**
*NGIEGOM (olembé )*
Contacts :655196915

| EXPERT CORPORATION | Epreuve de MATHEMATIQUES | CLASSE: TleD | |
|---|---|---|---|
| $1^{ere}$ évaluation de la $3^{eme}$ séquence DECEMBRE 2020 | | Durée : 4h | Coef : 7 |

**Proposée par : *Mr SYMPHORIEN STYVE KAMGA***

**NB : le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élevé de justifier toutes ses affirmations.**

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15points).

### EXERCICE 1 :(05,75pts)

A- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$,$\vec{v}$). On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : f(z) = $\frac{1}{3}(z+\frac{1}{z})$.

1. On désigne par K le point d'affixe f($\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$). Déterminer les coordonnées de K. [0.5pt]

2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : f(z) = $\frac{2}{3}$cosα. [0.75pt]

3. a) En déduire la solution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^4-2(\cos\alpha)z^2+1=0$ (on donnera les solutions sous formes exponentielle). [0.75pt]

b) Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjugués. [0.5pt]

c) Décomposer le polynôme à variable réelle x définie par : p(x) = $x^4-2(\cos\alpha)x^2+1=0$ en un produit de deux polynômes de second degré à coefficient réels. [0.5pt]

4. On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : 2(z – $\frac{1}{3}$) = (1 + i) (z' - $\frac{1}{3}$).

a) Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments Caractéristiques. [0.75pt]

b) Démontrer que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques. [1pt]

B- Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que :

$$z'=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)z+\frac{5+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

a) Écrire la forme algébrique de nombre complexe $w=(1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$. [0.5pt]

b) Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques. [0.5pt]

### EXERCICE 2 :(01Pts)

1) Linéariser l'expression $f(x)=\sin^3x\cos x$ [0.5pt]

2) Chercher une primitive de $f(x)-\frac{1}{4}\sin 2x$. [0.5pt]

### EXERCICE 2 :(05,25pts)

On considère la suite numérique U sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} U_1=3 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$$

1. On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$

On note (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm.

La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a) Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes $U_1$ , $U_2$ et $U_3$ de la suite $U$ en utilisant la courbe (C) et la droite (D). [0.75pt]

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ? [0.25pt]

2. On admet que $f$ est continue et strictement croissante $[2;3]$

a) Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$ [0.5pt]

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$ [0.5pt]

3) a) Démontrer que la suite U est décroissante [0.5pt]

b) En déduire que la suite U est convergence [0.25pt]

4) on considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1, V_{n+1} = (V_n)^2$. [0.5pt]

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$; $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$ [0.5pt]

c) Calculer $V_1$ puis exprimer $V_n$ en fonction de $n$. [0.5pt]

d) Exprimer $U_n$ en fonction de $n$. [0.5pt]

e) Démontrer que $lim\, V_n = 0$. En déduire la limite de U. [0.5pt]

## EXERCICE 4 :(03,5pts)

A- On considère l'équation $(E): x^5 - 209x + 56 = 0$

1) Démontrer que (E) admet trois solutions réelles, dont on donnera le signe. [0.75pt]

2) a- Démontrer que deux de ces solutions ont pour produit 1 et calculer leur somme. [0.75pt]

b- En déduit ces deux solutions et déterminer une valeur approchée $à$ $10^{-2}$ près de la troisième solution [0.75pt]

B- Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ;démontrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme $P_n$ de degré n tel que pour tout $x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!P_n(x)}{2(x^2-1)^{n+1}}$

[0.75pt]

C- Démontrer que pour tout nombre réel $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ on $à$ : $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$ [0.5pt]

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)

Situation :

Mme FOPA veut clôturer son champ. Un expert en topographie lui conseil ceci :

- Il faut prévoir une entrée délimitée par deux poteaux définis par deux points d'affixes respectives a et b, solutions de l'équation $z^2 + (3-3i)z - 2 - 6i = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, Construire la clôture suivant l'ensemble des points M du plan complexes d'affixe z tels que :

a)$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi$;  b) $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi$;  c)$\left|\frac{z-2-i}{z-1+i}\right| = \frac{3}{2}$

Tâches :

1. Déterminer et représenter la clôture et l'entrée prévue par le topographe en a). [1.5pt]

2. Déterminer et représenter la clôture et l'entrée prévue par le topographe en b). [1.5pt]

3. Déterminer et représenter la clôture et l'entrée prévue par le topographe en c). [1.5pt]