

TRAVAUX DIRIGES: FONCTION EXPONENTIELLE : dérivée-Primitive-Limites

EXERCICE 1

x étant un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

(a) $e^{3\ln 5}$; (b) $e^{\ln 2 + \ln 5}$; (c) $\ln(3e^{6x})$; (d) $\frac{e^x - 1}{e^x} \times \ln e^3 \times e^{\ln e^2} + 2 \ln(\ln e)$.

EXERCICE 2

x désigne un nombre réel strictement positif. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(1) $e^{x+\ln x}$; (2) $e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x}$; (3) $\frac{e^{\ln x}}{\ln(e^{x^2})}$; (4) $\frac{e^{\ln x}}{\ln(e^x)}$.

EXERCICE 3

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

A – (1) $e^{3x+1} = 7$; (2) $e^{x-3} = 1$; (3) $e^{2x-1} = 6$;

(4) $e^{-x-4} - 6 = 0$; (5) $e^{x+3} + 2 = 1$; (6) $e^{x+3} + \frac{3}{2} = 2$

B – (1) $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$; (2) $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$; (3) $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 - \ln x - 4 = 0$.

C – (1) $\ln x = -2$; (2) $\ln x = \frac{1}{4}$; (3) $\ln(x^2) = 16$; $(\ln x)^2 = 16$.

D – $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$.

EXERCICE 4

1- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $X^2 - 3X + 2 = 0$.

2- En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation : $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$.

EXERCICE 5

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

A - (1) $e^{-3x-2} > 3$; (2) $e^{x-6} > 1$; (3) $e^{-2x+3} \geq 6$; (4) $e^{-x+4} - 8 \geq 0$;

(5) $e^{x+2} < 8$; (6) $e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2$

B – (1) $2e^{2x} + 5e^x - 3 \leq 0$; (2) $e^{2x} - 5e^x - 6 \geq 0$; (3) $e^{2x} + 8e^x + 15 \leq 0$

EXERCICE 6

On considère le polynôme suivant : $p(x) = -x^2 + 7x - 6$

1. Ecrire $p(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

2. En déduire la résolution dans \mathbb{R} de l'inéquation : $e^{3x} - 7e^x + 6 < 0$.

EXERCICE 7

Pour tout x de \mathbb{R} . On pose : $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1. a) Vérifie que $p(-1) = 0$; et en déduire une factorisation de $p(x)$.

b) Donner alors la solution dans \mathbb{R} de $p(x) \leq 0$.

2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

(1) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5 \ln x - 2 \leq 0$; (2) $2 \ln x + \ln(2x - 1) \leq \ln(5x + 2)$.

EXERCICE 8

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} \ln(y + 6) - \ln x = 3 \ln x \\ e^{6x} e^y = e^{-6} \end{cases}$

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivant, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K à déterminer.

$$(1) f(x) = e^{2x} \ln x ; (2) f(x) = (x^3 + 4)e^{-x} ; (3) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ; (4) f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} ;$$
$$(5) f(x) = e^{x^3} \quad (6) f(x) = \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}$$

EXERCICE 10

Pour chacun des cas suivants, on considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie ci-dessous. Déterminer le D_f et calculer $f'(x)$ sur son ensemble de dérivabilité.

$$(1) f(x) = e^{\frac{1}{x}} ; (2) f(x) = e^{\frac{1}{2x+1}} ; (3) f(x) = e^{\ln x} ; (4) f(x) = (3x + 2)e^x ;$$
$$(5) f(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x ; (6) f(x) = \frac{x}{1 - e^x}$$

EXERCICE 11

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} , de chacune des fonctions suivantes :

$$(1) f(x) = e^{-x+3} ; (2) f(x) = e^{2x} ; (3) f(x) = (-2x + 3)e^{-x^2+3x-1} ; (4) f(x) = 3xe^{x^2-1} ;$$

$$(5) f(x) = \frac{e^x}{3e^x + 2} ; (6) f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{(e^x + 2)^2}$

En posant $X = e^x$ déterminer 3 réels a, b et c tel que pour $x \neq -2, \frac{1}{(x+2)^2} = a + \frac{bX}{x+2} + \frac{cX}{(x+2)^2}$

En déduire les primitives sur \mathbb{R} de f .

EXERCICE 13

Déterminer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln x ; (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x e^{2x} ; (3) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} ; (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} ; (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} ;$$
$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x) ; (7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x-1}}{e^x - 1} ; (8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-1}}{e^x - 1} ; (9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2 + e^x} ; (10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x - 1}$$
$$(11) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} ; (12) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-3x} ; (13) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5x+2} ; (14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{5x}}{x} ; (15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2} ;$$
$$(16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{3x}}{e^x + 2} ; (17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-5}}{x} ; (18) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 3)e^x ; (19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} e^x ;$$
$$(20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} ; (21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} ; (22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x-1}}{x^3} ; (23) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} ; (24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} ;$$

EXERCICE 14

Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux extrémités de l'intervalle K donné :

$$(1) f: x \mapsto e^{-x} ; (2) f: x \mapsto xe^{-x} ; (3) f: x \mapsto x + 1 - e^x ; (4) f: x \mapsto e^{-x^2} ; (5) f: x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$

Avec $K = \mathbb{R}$ pour chacune des fonctions ci-dessus.

$$(6) f: x \mapsto \frac{\ln x}{e^x} \text{ avec } K =]0 ; +\infty[; (7) f: x \mapsto \frac{e^x}{x + 1} \text{ avec } K =]-1 ; +\infty[$$