FICHE DE TD MATHS Terminales C, D et E : limités, continuité, dérivabilités, suites numériques et fonctions

Exercice 1

Étudiez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+x}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-x}{3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}$; 7) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{7}}{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{|x|-2}{x^2-4}$

Exercice 2

Étudiez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$;

8) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{\sin x}{x}$.
Étudiez les limites de f en 0, -1, en $+\infty$, en $-\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=-x+2 & \text{pour } x<3 \\ f(x)=x-4 & \text{pour } 3\leq x<5 \\ f(x)=-2x+13 & \text{pour } x\geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Soit la fonction numérique $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. On considère la fonction $g : x \longmapsto (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})\sin(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$
   a. Justifier que : $\forall x\in D_f, g(x)=2\frac{\sin f(x)}{f(x)}$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice 5

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $\sin^2 x \sin(x^2)$; 2) $\frac{4-\cos^2 x}{1-\sin}$; 3) $\sin x \cos^4 x$; 4) $\sin^3 x$;

5) $\cos(\sqrt{3x^2})$; 6) $\sqrt{\cos x}$; 7) $\sin(3x^2)$; 8) $x\sqrt{1-2x-x^2}$

9) $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$; 10) $(4x^2-2x+2)\sqrt{3-x}$; 11) $\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$; 12) $\frac{(x-3)^4}{(x+2)^6}$.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants : Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer la fonction dérivée f' de f.

1) $f(x) = \frac{x^3+x^2+3}{x}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x-2}$; 3) $f(x) = \frac{3x^2-4x}{4(1-x)}$; 4) $f(x) = \frac{x^3+4x^2+x-2}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{2(x+1)}$; 6) $f(x) = 2x+1-\frac{2}{(1-x)^2}$

Exercice 7

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction sin est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$. (*Rappel : on pourra utiliser la démonstration par récurrence*)

Exercice 8

Soit f la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle $I = [0, 1]$, associe le nombre réel $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur I. Quel est l'ensemble de définition de f^{-1} ?

2) La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur I ? Si oui, déterminer sa fonction dérivée $(f^{-1})'$.

Exercice 9

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

1) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f.

5) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.

6) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Dresser le tableau de variation de f. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

7) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f représentative de la fonction f en $+\infty$.

8) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 10

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$ *et* $g(x) = x^3 + 6x - 2$.

1. (a) Étudier les variations de g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Monter que $\lambda \in]0, 1[$ puis donner une encadrement de λ à 10^{-1} près.
   (d) Donner le tableau de signe de la fonction g.
2. (a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de f.
   (b) Étudier les branches infinies de f.
   (c) Vérifier que $f(\lambda) = \frac{3}{2}\lambda$ puis déduire un encadrement de $f(\lambda)$.
   (d) Montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (e) Déduis de (d) le tableau signe de f' puis son tableau de variation.
   (f) Montrer que la restriction h de f à $[\lambda, \infty]$ réalise une bijection sur un intervalle qu'on précisera.
   (g) Construire (C_f) et (C_h), courbes de f et de h dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 11

A- Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}\ \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Soit la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer la limite de u en $-\infty$.
   (b) Montrer que, pour tout x réel : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. En déduire la limite de u en $+\infty$.
2. (a) Montrer que $u(x) + 2x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.
   (b) Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$.
   En déduire le signe de $u(x) + 2x$.
   (c) Interpréter graphiquement ces résultats.
3. (a) Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par : $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction u.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.

B- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Tracer sa courbe représentative dans un repère.
5. (a) Montrer que, pour tout $y \in]0 ; 1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution α dans $[0 ; +\infty[$.
   (b) Exprimer α en fonction de y.

Exercice 12

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{pour tout } n > 1 \end{cases}$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \in I$.

b. Montrer que, pour tout $x \in$ I, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : pour tout $n > 1$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$.

d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

e. En déduire que (u_n) converge vers α

f. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?

3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.

Exercice 13

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{5}{3}}$.

1. (a) Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

   (b) Démontrer que pour tout x de $[0;1]$, $-\frac{5}{6} \leq |f'(x)| \leq 0$.

   (c) Démontrer que l'équation $g(x) = x$ possède une unique solution α dans $[0;1]$ et justifier l ?encadrement $0,25 \leq \alpha \leq 0,3$

2. (a) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 0,3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$

   (b) Démontrer que U_n est un élément de $[0;1]$ pour tout entier naturel n.

   (c) Démontrer que $|U_{n+1} - \alpha| \leq |Un - \alpha|$

Exercice 14

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$.

   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.

   (a) Exprimer S_n en fonction de n.

   (b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 16

On considère la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définir par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + 2n - 1 \end{cases}$

1. Calculer U_1,U_2 et U_3. La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle croissante ou décroissante ?
2. On pose $t_n = 4n - 10$ et $v_n = u_n - t_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique,et que la suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique.
3. Montrer alors que $v_n = \dfrac{11}{2^n}$
4. Quelle est la limite de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$?
5. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$, $T_n = t_0 + t_1 + \ldots\ldots + t_n$ et $W_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$. Donner l'expression de T_n, W_n *et* S_n en fonction de n.

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 3x + 4y = -8$ a. Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E). b. Résoudre (E) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (Δ) dont une équation est $3x+4y+8 = 0$ et on désigne par A le point (Δ) de d ?abscisse 0. Montrer que si M est un point de (Δ) à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5. Soit N un point de (Δ) de coordonnées (x, y). Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$ En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Exercice 17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points A, B *et* C d'affixes respectifs $1, z$ *et* z^2.

1. Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{|-2x+3|}$, b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$.
2. (a) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$
   (b) En déduire les limites suivantes : $a)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sin x+1}-1}{\sin 2x}$
3. Démontrer les inégalités suivantes :
   - $\forall x \in [1;4]$, $\frac{5}{4}(x-1) \leq \sqrt{x} + x - 2 \leq \frac{5}{4}(x-1)$
   - $\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $2\cos x - 2 \leq \sqrt{2}x$
4. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = e^{-x}\cos x$ et $g(x) = e^{-x}\sin x$.
   (a) Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.
   (b) Déduire que $f(x) + g(x) = -f'(x)$ et $f(x) - g(x) = g'(x)$.
   (c) Déterminer les primitives F de f et G de G telles que $F(0) = \dfrac{3}{2}$ et $G(0) = \dfrac{3}{2}$.

LEADERS PREPARATIONS