FICHE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES DES CONGES DE NOEL

CLASSE DE TERMINALE D JJJ

LYCEE BILINGUE DU NLONAKO DECEMBRE 2020

I-*NOMBRES COMPLEXES*

Exercice 1 : (Nombres complexes : étude algébrique)

Soit le polynôme $P(z) = 2z^3 - 4z + \lambda$ où z désigne un nombre complexe et λ est un nombre réel.

On considère l'équation (E) : $P(z) = 0$

1. Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)
2. En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.
3. **a)** Déterminer λ pour que l'équation (E) admette comme solution réelle 2
   b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur de $\lambda = 0$
4. On donne $\lambda = 8$
   a) Vérifier que 1+i est une solution de (E)
   b) Résoudre alors l'équation (E)
   c) Déterminer le module et un argument à chaque solution de (E)

Exercice 2

Soit P un polynôme définit par $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + 8$ tel que $P(1+i) = 0$ et $P(1) = 6$.

1- a) Montrer que $a, b\ et\ c$ vérifient le système (S): $\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 2a + 2b - c = 8 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$

b) Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) et en déduire l'expression de $P(z)$.

2- On considère l'équation (E): $2z^3 - 4z + 8 = 0$

a) Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)

b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.
(On ne demande pas de la déterminer.)

c) Vérifier que 1+i est une solution de (E)

d) Résoudre alors l'équation (E)

e) Déterminer le module et un argument de chaque solution de (E)

EXERCICE 3

On considère le nombre complexe : $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument.
2. En déduire le module de a et vérifier qu'une mesure de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$ représenter sur le même graphique les nombres : $a, -a, a^2$.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$ puis le $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$
4. Représenter sur le même graphique précédent l'ensemble des points M d'affixe z tels que a^2z soit réel.

Exercice 4

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe.

a) $z' = iz + 1$; b) $z' = (1-i)z + 1$; c) $z' = z + 1 + i$

2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, de rapport K et d'angle α :

a) $\Omega(1+i)$: $K = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(i)$: $K = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Exercice 5

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm)

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4. l'application f associe à tout point M d'affixe z de P, distinct de A, le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-4}{z-1}$.

1) Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$. Déterminer l'affixe de $C' = f(C)$.

2) Démontrer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive). Placer les points I, J, C et C'.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x' y'$ sont des réels.

a) Déterminer x' et y' en fonction de $x$et y.

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit réel.

c) Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur.

4) Donner une interprétation géométrique de $|Z|$, $|z-4|, |z-1|$. En déduire l'ensemble D des point M d'affixe z tels que $|Z| = 1$. Construire D.

b) En déduire les expressions plus simples de A et B.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On donne $z_A = 1$, $z_B = -3i$, $z_C = 1 + i$ et $z_D = 2 - 3i$.

s est la similitude directe plane qui transforme A en B et C en D.

1) Donner l'écriture complexe de s.

2) On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\boldsymbol{z' = u^2 z - i}$ où u est un nombre complexe.

a) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une translation.

b) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une homothétie de rapport 2.

c) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

d) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une similitude de rapport 4 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 7 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

1) Soit h la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $\boldsymbol{z_1 = 2z + i}$. Donner la nature et les éléments caractéristique de h.

2) Soit r la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_2 d'affixe z_2 tel que $\boldsymbol{z_2 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z}$. Donner la nature et les éléments caractéristique de r.

3) Soit la transformation $s = hor$ du plan dans lui-même Donner l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristique de s.
4) Soit la similitude directe plane s' qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}z - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
a) Déterminer l'affixe de l'image O' du point O par s'.
b) Déterminer l'expression analytique de s'.
c) En déduire :
i) l'équation cartésienne de l'image (D') de la droite (D) : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$ par s'.
ii) l'équation cartésienne de l'image (C') du cercle (C) de centre O et de rayon 3cm par s'.

EXERCICE 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

1). On donne $z_A = 1 \quad z_B = -3i \quad z_C = 1+i \quad z_D = 2-3i$

S est la similitude directe qui transforme A en B et C en D. S(M) =M'.Exprimer z' en fonction de z où z et z' sont les affixes respectives de M et M'

2) On considère l'application F qui, à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = u^2 z - i$ où u est un nombre complexe

a) Déterminer les complexes u pour que F soit une translation

b) Déterminer les valeurs de u pour que F soit une homothétie de rapport -2

c) Déterminer u pour que F soit une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

d) Déterminer u pour que F soit une similitude directe de rapport 4 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ d'unité 4 cm. On donne les points A, B et C d'affixes respectifs 2; $\sqrt{2}i$ et $2+\sqrt{2}i$ On appelle I, J et K les milieux des segments $[OA]; [BC]; [CA]$.
A - 1a) Montrer que la similitude S qui transforme O en A et B en I a pour écriture complexe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + 2$
b) Préciser le rapport et l'angle de S
c) En déduire l'affixe w du centre Ω de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$ et à celui de diamètre $[IB]$
d) Faire la figure et placer Ω
e) Quelle est l'image par S du rectangle $OACB$?
2) On considère la transformation $g = SoS$.
a) Quelles sont les images des points O, B et A par g ?
b) Donner l'écriture complexe de g
c) Montrer que g est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
d) Montrer que les droite (OC) ; (BK) et (AJ) soit concourantes.
B - On définit la suite des points B_n par $\begin{cases} B_0 = B \\ B_{n+1} = S(B_n)\ pour\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$
1) Quels sont les points B_1 et B_2 ?

2) On considère la suite (U_n) définie par (U_n) est la longueur du segment $[B_{n+1}, B_n]$.
a) Calculer U_0
b) Montrer que (U_n) est une suite géométrique.
c) En déduire $(U_n)\ en\ fonction\ de\ n$.la suite (U_n) est elle convergente ?
d) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots U_n$ en fonction de n
e) Quelle est la limite S_n quand $n \to +\infty$?

EXERCICE 10

A. On désigne par C l'ensemble des nombres complexes et on considère la fonction f définie dans C par **:** $f : C \to C$ qui à $z \mapsto z^3 + 2z + 16$

1 - Démontrer que si z_0 est racine de f alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

2 - Déterminer deux nombres réel a et b tels que : $f(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})(az + b)$

3 - Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$

B. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + 3i et 2i

1. Soit S la similitude plane de centre B qui transforme O en A. On note z' d'affixe de M' de M d'affixe z

a) Exprimer Z' en fonction de Z

b) Calculer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude S

2. Soit T la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' = iz + 3.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de T On notera Ω le point invariant par T.

3. Montrer que Ω, A et B sont les sommets d'un triangle isocèle dont on précisera le sommet principal.

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$)(unité graphique 1cm).
On considère l'équation $(\mathbf{E}): \boldsymbol{z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.}$

1. **a.** Montrer que $-i$ est solution de **(E)**.
b. Déterminer les nombres réels *a* et *b* tels que :
$$\boldsymbol{z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 + az + b).}$$
c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
2. **A, B** et **C** sont trois points d'affixes respectives $\boldsymbol{4 + i, 4 - i}$ **et** $\boldsymbol{-i}$**.**
a. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
b. On considèrele point **Ω** d'affixe 2 et D l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de D.
3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).

4. On considère la transformation ϕ quià tout point *M* d'affixe $z \neq 2$, associe le point *M* ' d'affixe z'tel que $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a. Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectifs des points A, B et C.

b. Vérifier que A', B' et C'appartiennent à un cercle (C'') de centre P d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer (C ').

c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de *z*.

d. Soit *M* un point d'affixe $z$appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

e. En déduire l'image du cercle (C) par ϕ.

EXERCICE 12

1) On considère l'application f de l'ensemble des nombres complexe C dans lui-même qui à tout nombre complexe z, associe le nombre complexe : $Z' = -iZ + 4i$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. A tout point M de coordonnées x et y du plan complexe P de repère direct orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on associe son affixe $Z = x + iy$.

a) Montrer que l'équation $Z = f(Z)$ possède dans C une solution unique que l'on notera Z_0

b) Montrer que pour tout nombre complexe Z on a $Z' - Z_0 = -i(Z - Z_0)$.

c) En déduire que M' est l'image de M par une rotation r dont on précisera le centre A de l'angle.

d) Déterminer la nature exacte du triangle OMM'.

2) Soit B le point d'affixe $3 + 3i$. Quel est l'ensemble C des points M dont l'affixe Z vérifie $|Z - 3 - 3i| = \sqrt{2}$?

3) a) Quel est l'ensemble D des points dont l'affixe Z vérifie $|Z - 1 + i| = |Z + 1 - i|$?

b) Donner une équation de (D).

4) a) Montrer que A appartient à C et à D.

b) Représenter C et (D) puis A dans le plan P.

c) Quelle est la position relative de C et (D) ?

II- LIMITES ET CONTINUITE

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3}$ (C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a) Calculer f '(x) puis monter que $f'(x)=\frac{(x+1)^2(x^2-2x+9)}{(x^2+3)^2}$

b) En déduire le tableau de variation de f

3) a) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x)=x+2-\frac{8}{x^2+3}$

b) En déduire que la droite (D) d'équation x-y+2=0 est asymptote à la courbe (C) de f

c) Quelle est la position relative de (C) par rapport à (D) ?

4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 puis montrer qu'elle est parallèle à (D)

5) $u(x)=x^3+2x^2+3x-2$

Montrer que l'équation u(x)=0 admet une solution dans $[0,1]$

6) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer

7) Tracer (C) ainsi que (D) et (T)

Exercice 2

1) On considère la fonction f définie de IR vers IR par : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 \ si \ x<2 \\ 3x-2a \quad si \ x>2 \\ b \quad si \ x=2 \end{cases}$

Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f soit continue en $x_0=2$

2) On considère la fonction g définie de IR vers IR par : $g(x)=\frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction g

b) Déterminer s'il existe le prolongement par continuité de cette fonction en $x_0=2$

3) Etudier les branches infinies à l'infini de la fonction h définie par :

$$h(x)=\frac{5x^3-2x+12}{x}$$

4– Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}-x$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{4x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{3x}$; $\lim\limits_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\cos x+5x)$

EXERCICE 3

1-Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x - x\cos x & si\ x<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & si\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \\ x^2 - b & si\ x>\pi \end{cases}$$

2- Soit la fonction g définie par : $g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$

a) Démontrer que $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}$

b) Démontrer que $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\le g(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

EXERCICE 4

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g définie par $g(x)=x^3-3x-4$

1 – Etudier les variations de g

2 – Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à [2 ;3] tel que g(α) = 0

3 – Déterminer la valeur de α à 10^{-2} près en utilisant la méthode par dichotomie

4 – Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

PARTIE B : Etude de la fonction f

1 – Déterminer le domaine de définition de la fonction f, puis calculer les limites de f aux bornes de ce domaine .

2 – Justifier que f est dérivable sur D f et montrer que pour tout $x\in Df$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

3 – Déduire le sens des variations de f sur D f

4 – Dresser le tableau des variations de f

5 – Etudier les branches infinies de la courbe (C f)

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty ; -1[$

1 – Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

2 – Résoudre dans I, l'équation $h(x)=0$

3 – Dresser le tableau des variations de h^{-1}

4 – Calculer $(h^{-1})'(0)$

EXERCICE 5 Soit la fonction $f \to \sqrt{1+x}$

a) Etudier f sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et dresser son tableau de variation.

b) Montrer en calculant f'', que la dérivé f' de f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et en déduire que : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right] \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[0;a]$ montrer que pour tout $a \in [0;1]$, $\quad 1+\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq \frac{a}{2}$

d) Montrer de même que pour $-\frac{1}{2} \leq \square \leq 0$:
$-\frac{a}{2} \leq 1-\sqrt{1+a} \leq -\frac{a}{2\sqrt{1+a}}$

e) En déduire que pour tout $a \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$, $\quad 1+\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq \frac{a}{2}$

EXERCICE 6 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad x \leq -1 \\ \frac{2x+2}{x+2} & si \quad x > -1 \end{cases}$

On note (C_g) la courbe de g relativement à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Préciser l'ensemble de définition D_g de g.
2) Etudier la continuité de g en -1.
3) a) Etudier la dérivabilité de g en -1

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
Tracer (C_g).

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). L'unité de longueur est 2cm. On donne la fonction numérique *f* définie par: $f(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. D et $(\mathcal{C})$ désignent respectivement l'ensemble de définition et la courbe représentative dans le repère, de *f.*

1. Déterminer D et les limites aux bornes de D.

2. Calculer la dérivée première *f'* de *f* et en déduire le tableau de variations de *f*.

3. Calculer la dérivée seconde *f''* de *f* et en déduire que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère (O ; I ; J)

5. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\alpha \in]1,2[$ (appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $h(x) = f(x) - x \ sur \ [1,\ 2]$)

5. Montrer que *f* réalise une bijection de IR dans un intervalle J à préciser.

En déduire la construction dans le même repère de la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1}

6. En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$ de *f,* construire dans le même repère la courbe $(\mathcal{E})$ de la fonction $g: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (on remarquera que $g(x) = f(x) - 1$)

EXERCICE 8

1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4+x}}{3-\sqrt{9+x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-3\sqrt{x-1}}{3x+\sqrt{9x^2+x}}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4x^2+2x} - 2x$ **f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-3\sqrt{x-1}}{3x+\sqrt{9x^2+x}}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{cosx}-1}{x}$

2)a) Etudier les branches infinies de la fonction $f(x) = \sqrt{9x^2+6x+5}$

b) Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite $(D): y = 3x+1$.

3) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction

$$p:\ x \mapsto p(x) = \frac{x^3\ +3x\ -12}{x^2\ -1}$$

EXERCICE 9 **Le problème comporte trois liées parties A , B et C**

PARTIE A Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur$]1,+\infty[$.

2) Etudier les variations de la fonction f

3) En déduire que $(E): f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1,2[$.

PARTIE B Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que l'équation (E)est équivalent à l'équation$(E'): g(x) = x$.

2) a) Montrer que si $x \in [1\,,2]$, alors $g(x) \in [1\,,2]$.

b) Justifier que g est dérivable sur$]0,+\infty[$; calculer la dérivée g' de g

c) Montrer que pour tout $x \in [1\,,2]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d) En déduire que pour tout $x \in [1\,,2]$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

PARTIE C On considère la suite (u_n)définit par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est élément de $[1\,,2]$.

b) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}$ les inégalités$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|et|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

d) Déterminer le plus entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

e) Déterminer U_p

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}—\{-1;1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J) (unité graphique : 2cm).

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, montrer que $2 < \alpha < 3$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.
3. Etudier pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $g(x)$.

II. 1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes du Df ensemble de définition.

2) Montrer que, pour tour x de $\mathbb{R} - \{-1;1\}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau des variations

3) a) Montrer que, pour tour x de $\mathbb{R} - \{-1;1\}$, $f(x) = x + 1 + \frac{x+2}{x^2-1}$.

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

Exercice 11

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x + \sqrt{x}$.

1) Montrer que h est dérivable sur l'intervalle $[1\,;4]$ et pour tout $t \in [1\,;4], \frac{5}{4} \leq h'(t) \leq \frac{3}{2}$.

2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Exercice 12

1-a) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty\,;\ 1]$ par la fonction g définie par : $g(x) = x^3 + 2x + 5$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $-\frac{3}{2} \leq \alpha \leq -1$.

2) Soit f une fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera, puis déterminer sa réciproque f^{-1}.

EXERCICE 13

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f dont le tableau de variation est donné ci-dessous

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{27}{4}$	↗	$\frac{27}{4}$	↘	0

1) Déterminer le domaine de définition de f et préciser les limites à ses bornes puis conclure.
2) Justifier que f réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-1]$ vers un intervalle que l'on précisera.
3) Déterminer le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x)=0$ en justifiant votre démarche.
4) Déterminer le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x)=1$ en justifiant votre démarche.

Problème 1

1) Soit $p$le polynôme défini par $p(x)=x^3-x^2+3x+1$.
a) Dresser le tableau de variation de$p$.
b) Démontrer que l'équation $p(x)=0$admet une unique solution $\alpha\in\,]-1\,;0[$, puis donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.
c) En déduire le signe de p sur $\mathbb{R}$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\frac{2}{x^2+1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.
a) Déterminer le domaine de définition de $f$et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
b) Déterminer la dérivée f' de f et montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{(x+1)p(x)}{(x^2+1)^2}$.
c) A l'aide de la question 1-c), déterminer le signe de $f'(x)$et dresser son tableau de variation .
d) Représenter la courbe de f.

Problème 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par : $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.
1) Soit g le polynôme défini par $g(x)=x^3+3x+8$.
a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Démontrer que l'équation $g(x)=0$admet une unique solution $\alpha\in\,]-2\,;0[$, puis donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.
c) Préciser le signe de $g$sur $\mathbb{R}$.

2) Etude de la fonction f

a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
b) Calculons la dérivée de f et montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.
c) A l'aide du tableau de signe de g, donner le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
d) Montrer que $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$, puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$
e) Existe-t-il les tangentes à (C)parallèles à la droite $(D)\colon y=x$? Si oui déterminer les.

Problème 3 :

1) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^3 + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0\,;1[$, puis donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de $g$sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Démontrer que les droites $(D): y = x + 1$et $(D'): y = x - 1$et sont des asymptotes à (C) respectivement en $-\infty\, et + \infty$

d) Construire la courbe (C).

3) Soit h la restriction de fà $]1\,;+\infty[$.

a) Montrer que h admet une bijection réciproqueh^{-1}.

b) Construire en interrompu la courbe de h^{-1} dans le même repère.

« Le tigre ne déclare pas sa tigritude, il attrape sa proie et la dévore.»