MINESEC

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

**LE GENIE DE BRAZZA**

Paix-Travail-Patrie

« Groupe de Répétition »

05 jan 2021

Situé : Collège ROYAL (NDOGBONG)

TLE D & C

collège LA BONTE (BRAZZAVILLE)

Par : MBEI Emmanuel 1er

# FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

**DOCUMENT DE TRAVAIL : GRATUIT**

**SOUS L'ENCADREMENT DE :**


- M. MBEI Emmanuel1er (professeur des lycées, enseignant en Tle C&D)
- M. FOFOU ERICK (professeur des lycées, AP de Maths LYBINYBRA)

**TEL : 676 90 25 09/ 697 17 67 71/ 683 03 21 00**


**Votre réussite est notre meilleure publicité**

**« Le génie est fait d'un dixième d'inspiration et de neuf dixième de transpiration » Edison**

## EXERCICE 1

Il comporte deux parties indépendantes A et B

**Partie A :** 4,5pts

$f$ est la fonction de IR vers IR définie sur $IR \setminus \{-2; 2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5x-1}}{x-2} & \text{pour tout } x \in ]2; +\infty[ \\ f(x) = \dfrac{x^3-5x^2+10x-8}{4-x^2} & \text{pour tout } x \in ]-\infty; 2[ \setminus \{-2\} \end{cases}$$

1) a)Calculer les limites de $f$ en 2 par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.
   b) Dire en justifiant si on peut prolonger $f$ par continuité en 2.
   Si oui , définir ce prolongement.
2) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3) a) Calculer la limite de $f$ en $-\infty$.
   b) Etudier la branche infinie en $-\infty$ .

**Partie B :** 4,5pts Ci-dessous, est le tableau de variation de la fonction $f$ définie sur IR par : $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ .
2) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
3) Déterminer un encadrement de $\alpha$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.
4) g est la restriction de $f$ à $[0; 1]$
   a) Justifier que $g$ est une bijection de $[0; 1]$ dans un intervalle que l'on précisera.
   b) Construire les courbes représentatives de g et $g^{-1}$ dans un repère orthonormé (O, I,J). (Unité sur chaque axe : 2cm)

## EXERCICE 2

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ et $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

I. Etude de la fonction g
   1) Etudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variation
   2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution réelle $\alpha$ telle que $1 < \alpha < 2$ 0,5 pt
   3) Déterminer un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.
   4) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

II. Etude de la fonction f
   1) Déterminer $D_f$
   2) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition (on précisera éventuellement les asymptotes)

1) Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$ et l'exprimer en fonction de $g$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de $f$.
2) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$

III. On considère la restriction $h$ de $f$ sur $]-1;+\infty[$
1) Montrer que $h$ est bijective de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Représenter dans le même repère la fonction $f$ et la fonction réciproque $h^{-1}$ de $h$.

## EXERCICE : 3

Soit la fonction f définie dans $[0;\pi]$ par f(x)= $\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$. On désigne par ( C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1) Calculer pour tout x ∈ $[0;\pi]$, f'(x) et f''(x).
2) Étudier les variations de f' sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$ et en déduire que f'(x)= 0 admet une unique solution $\alpha$ tel que $2{,}6 < \alpha < 2{,}7$ .
3) Montrer f'(x) $> 0 \Leftrightarrow x \in ]\alpha, \pi[$ et dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer la courbe ( C). prendre $\alpha = 2{,}6$ et comme unité graphique : 1,5cm

## EXERCICE 4:

1) soit p la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par p(x) = tanx - $\frac{4}{\pi}$x

a)Montre que l'équation p'(x)=0 (p' fonction dérivée de p) admet une unique racine $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

b)En déduire le sens de variation de p

2)soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$ telle que $1 \leq f'(x) \leq 2$
(f' fonction dérivée de f

a) justifier que f est continue sur $[0;1]$

b)sachant que f(0)= - 1 et que f(1)=0,5

I) justifier que l'équation f(x)=0 possède une unique solution $x_0 \in [0;1]$

II)Monter que pour tout x ∈ $[0;1]$ ; x-1 $\leq f(x) \leq 2x-1$ et en déduire que $x_0 \in [0{,}5;1[$

3 a) Démontrer en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis que pour x ∈ $[0;1]$ a :$-\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}x \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}x$

b) Donner une interprétation géométrique de ce résultat

## EXERCICE 5 ;

1)On considère la fonction f définie de $]0;2[ \;\rightarrow\; R$ par f(x) = $\tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$

a)Démontrer que f admet une réciproque notée g définie sur R

b)sans déterminer g' (fonction dérivée de g) déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse $x_0 = 1$

c)Montrer que pour x ∈ $R$ g'(x)= $\frac{2}{\pi(1+x^2)}$

2) On définit la fonction b sur R par b(x) = x - $\sqrt{|1-x^2|}$

a) Déterminer le domaine de définition de b b)
Etudier la continuité et la dérivabilité de b aux points d'abscisses $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$

b)Etudier les branches infinies à la courbe de la fonction b

c)Etudier les variations de b et dresser son tableau de variation
d)Construire la courbe de b avec soins

## EXERCICE 6

A) Soit f la fonction définie sur I= $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2) On désigne par $f^{-1}$ la fonction réciproque de f.
   a) Déterminer $f^{-1}(1)$
   b) Montre que $f^{-1}$ est dérivable sur ]0 ;2[ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

B) Soit g la fonction définie sur $[0 ;\pi[$ par $g(x) = \tan\frac{x}{2}$.

1) Montrer que g admet une fonction réciproque $g^{-1}$définie sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $g^{-1}(1)$
2) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

## EXERCICE 7

### PARTIE A : 4pts

1) Déterminer une primitive des fonctions :
   a) $f(x) = \text{Sin}x.\text{Cos}^2x$ ; $g(x) = \frac{2x^3-4x^2+7}{x^2}$ ; $l(x) = \frac{6x+3}{(x^2+x+5)^2}$
2) soit la fonction $h(x) = \sin^5x$
   a) déterminer les primitives de h.
   b) en déduire la primitive de h qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$ .

### PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = 2 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ .

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]0 ;+\infty[$ une unique solution $\beta$ et que $1 < \beta < 2$.
4) Montrer que $\forall x \in [1 ;+\infty[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
5) Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n - \beta|$.
   c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \beta| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |U_0 - \beta|$ et que $|U_n - \beta| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n$
   d) En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et préciser sa limites.

« Je crois beaucoup en la chance ; et je constate que plus je travaille, plus la chance me sourit…… » **Thomas Jefferson**