

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE : TD

Tél : 663855563 (WhatsApp uniquement)



Exercice 1

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^{2n} - 1$ est divisible par 8

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$
 est majorée par 1

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

Exercice 2

Soient $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ trois nombres complexes.

1. Écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle

2. Écrire z_3 sous la forme algébrique

3.a) Dédire la forme exponentielle de z_3

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 3

Soit les nombres complexes $z = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ et $Z = 8\sqrt{3} + 8i$

1. Écrire le nombre complexe Z sous forme trigonométrique

Déterminer les racines carrées de Z sous la forme trigonométrique

2. Calculer z^2 .

Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous la forme algébrique.

3. Dédire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice 4

Soit l'équation suivante (E) : $z^3 - 4iz^2 - (6+i)z + 3i - 1 = 0$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure noté z_0 que l'on déterminera.

2. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1 = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$ et résoudre l'équation (E).

Exercice 5

Soit le p polynôme défini par $p(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (3 + 12i)z + 1 - 8i$

1. Démontrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 .

2. Résoudre l'équation $z^2 - (4 + 4i)z - 1 + 8i = 0$

3. Montrer que $p(z) = (z - z_0)(z^2 - (4 + 4i)z - 1 + 8i)$

4. Déduire l'ensemble solution de l'équation $p(z) = 0$

5. Soient A, B et C les points d'affixes respectifs $1, 1 + 2i, 3 + 2i$. On désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et f l'application du plan dans lui-même

qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{z}i + 2 + \frac{3}{2}i$

5.1 Placer les points A, B et C dans le plan complexe $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

5.2 Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en B .

5.3 Déterminer la nature et éléments caractéristiques de f

5.4 Démontrer que I est l'image du point A par f .

Exercice 6

Partie A

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2- On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = -\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3- Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)$ est négatif, puis dresser le tableau de variation de f .

4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

5- Tracer la courbe C_f de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie B On se propose de résoudre dans $]1, 2[$ l'équation $f(x) = 0$.

1- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.

2- Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.

b) Montrer que si $x \in]1, 2[$ alors $g(x) \in]1, 2[$.

c) Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.

d) Montrer que pour tout $x \in]1, 2[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

e) En déduire que $\forall x \in]1, 2[, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.