

DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES

Deuxième séquence 2020-2021

Par : M. NGNAZO Ruphin

NB : Le sujet comporte deux parties obligatoires sur **140 points**. Le correcteur tiendra compte de la clarté dans la rédaction et la cohérence dans les idées. Justifier toutes vos affirmations

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (105pts)

EXERCICE 1:

[14points]

Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

- 1- Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive. [3.5pt]
- 2- Calculer $a + b$ et $a \times b$. En déduire a et b . [3.5pt × 3]

EXERCICE 2:

[35points]

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$

- 1) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés. [3.5pt]
- 2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
 - a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) . [3.5pt]
 - b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) . [5.25pt]
 - c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ . [3.5pt]
 - d) Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) [5.25pt]
- 3) Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2z = 0$.
 - a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants. [3.5pt]
 - b) Donner la représentation paramétrique de la droite (\mathfrak{D}) intersection des plans P_1 et P_2 [3.5pt]
 - c) La droite (\mathfrak{D}) et le plan (ABC) sont-ils sécants ? Parallèles ? [3.5pt × 2]

EXERCICE 3:

[26.25points]

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle $x: 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

- 1) On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
 - a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$ [5.25pt]
 - b) Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14u + 39v = 1$. [5.25pt]
 - c) Vérifier que le couple $(-25; 9)$ est solution de cette équation. [5.25pt]
 - d) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient. [5.25pt]
 - e) Déterminer, parmi les couples $(u; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible. [5.25pt]

EXERCICE 4:

[33.25points]

- 1- Soit f l'application de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $]1; +\infty[$ définie par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.
 - a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} . [3.5pt]
 - b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}}$ [5.25pt]
- 2- Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Soit $x > 0$. Montrer que : $\forall t \in [x; x + 1]$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. [3.5pt]
- b) Dédurre de l'inégalité des accroissements finis que : $\forall x > 0$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. [1.75pt]
- c) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration de $\sqrt{33} - \sqrt{32}$. [1.75pt]
- 3- a) Démontrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1$ admet dans \mathbb{R} , une unique solution. [3.5pt]
- b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . [3.5pt]
- 4- Soit $A = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$. On se propose de montrer que A est un entier naturel. On pose $m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}$, $a = \sqrt[3]{28 + m}$ et $b = \sqrt[3]{28 - m}$ et de ce fait $A = a + b$.
- a) Montrer que $A^3 = 56 + 3abA$. [3.5pt]
- b) Calculer a^3b^3 et en déduire que $A^3 = 56 + 2A$. [3.5pt]
- c) On pose $f: x \mapsto x^3 - 2x - 56$. Calculer $f(4)$ et en déduire la valeur exacte de A . [3.5pt]

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES

[31.5point]

La commune de MBOUDA et les neuf communautés villageoises qui la constituent perçoivent des taxes d'une entreprise qui exploite leur forêt communautaire. Si dessous sont donnés les détails sur le calcul et la gestion de ces taxes.

1) Taxes perçus par les communautés villageoises

Le montant global de cette taxe en million de francs CFA à la $n^{\text{ième}}$ année d'exploitation est $t(n) = 2^n - 1$. Pour éviter la sur-taxation et les querelles entre les communautés, cette taxe n'est perçue que lorsque $t(n)$ est divisible par 9. Toutes les communautés reçoivent alors le même montant et chaque communauté a l'obligation de réaliser au moins un projet.

2) Taxes perçues par la commune

Pour ne pas susciter des convoitises, le montant de cette taxe est généralement donné dans la base 16 par la formule $c(x) = \overline{x7D7840}^{16}$ où x est l'unique solution de l'équation $2^x - 3x - 280 = 0$.

3) Impact de la COVID 19

En 2020, la crise sanitaire a affecté les activités de l'entreprise qui n'était qu'à sa sixième année d'exploitation. Ainsi, en dehors de la commune qui a perçu la somme prévue dans le contrat, chaque communauté a perçu un montant en francs CFA estimé en base 16 à $\overline{2ABCDE}^{16}$.

1) Projet de la commune

Avec la somme perçue, le maire envoie les ouvriers dans un site touristique aménagé un espace sur lequel sera construit un orage d'art. Les dimensions du site ne seront pas données mais dans le document qui leur est remis, ils lisent : « *L'ouvrage sera réalisé sur un terrain de forme d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse et la base seront des entiers naturels ayant $3^25^2m^2$ comme différence entre leurs carrés* »

Tâches

- 1) Quel est le nombre minimal de projets que pourra réaliser chaque communauté villageoise sachant que l'entreprise va exploiter la forêt pendant 30 ans ? [10.5pt]
- 2) Déterminer en base 16 la somme que l'entreprise a donné globalement à la commune et aux neuf communautés villageoises en 2020. [10.5pt]
- 3) Quel est le montant maximal que les ouvriers pourront gagner si la commune paye l'aménagement d'un m^2 du site à 12000FCFA ? [10.5pt]