EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB: *Clarté, lisibilité et précision seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.*

PARTIE A : EVALUATION DES RESOURSES (15 ,5 points)

Exercice 1 : (4,25 points)

Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;\ +,.)$ munit de la base canonique $B = (\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$. On considère l'ensemble $F = \{(x\ ;y\ ;z)/2x - y + 3z = 0\}$; les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$; $\vec{v} = -\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{w} = -2\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$. **[0,75pt]**
2) En déduire la famille $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est libre. **[0,5pt]**
3) En déduire que $B' = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **[0,5pt]**
4) Montrer que F est un sous-espace vectoriel, puis déterminer une base et la dimension. **[1,5pt]**
5) Déterminer les coordonnées de $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ dans la base B'. **[1pt]**

Exercice 2 : (5,5 points)

On dit que deux cercles sont orthogonaux lorsqu'ils sont sécants et si leurs tangentes respectives en chaque point d'intersection sont perpendiculaires.

1) Soit (C_1) un cercle de centre Ω_1 et de rayon R_1 et (C_2) un cercle de centre Ω_2 et de rayon R_2. Donner un encadrement de la distance $\Omega_1\Omega_2$ de façon à ce que les deux cercles soient sécants. **[0,5pt]**
2) Le plan est muni d'un repère (O ; I , J). On définit les cercles (C_1) et (C_2) par les équations cartésiennes suivantes :
   $(C_1) :\ x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ et $(C_2) :\ x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$
   a) Déterminer les coordonnées de Ω_1 et Ω_2 , et les rayons R_1 et R_2 des cercles (C_1) et (C_2) . **[1pt]**
   b) En utilisant la question 1) , montrer que (C_1) et (C_2) sont sécants. **[0,75pt]**
   c) Soient A et B les points d'intersection des cercles (C_1) et (C_2). A ayant une abscisse nulle. Déterminer les coordonnées de A et B. **[1pt]**
   d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_1) au cercle (C_1) en A, ainsi qu'une équation de la tangente (T_2) au cercle (C_2) en A. **[0,5pt]**
   e) Montrer que les cercles (C_1) et (C_2) sont orthogonaux. **[0,75pt]**

Exercice 3 : (4 points)

ABC est un triangle équilatéral de coté 4cm. P est le milieu de $[AB]$, G est le milieu de $[PC]$, K est le point le point tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et J est le barycentre des points $(A, 1)$ et $(C, 2)$.

1) Réaliser une figure où vous placerez les points P, G, K et J. **[1pt]**

2) Ecrire K comme barycentre des points B et C affectés des coefficients à préciser. **[0,5pt]**
3) Démontrer que les points A, G et K sont alignés. **[0,5pt]**
4) Démontrer que les droites (AK), (BJ) et (CP) sont concourantes en G. **[1pt]**
5) Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=16$
   a) Déterminer le réel *k* tel que pour tout M, $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=k\overrightarrow{MG}$ **[0,5pt]**
   b) Déduire la nature de $(\mathcal{C})$ et le construire. **[0,5pt]**

<u>Exercice 4</u> : (2,75 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x+1-\sqrt{7-6x}>0$ **[0,75pt]**
2) Déterminer les valeurs de a, b et c pour que la parabole d'équation ax^2+bx+c passe par les points $M(-1\,;-2)$, $N(2\,;7)$ et $P(1\,;6)$. **[2pts]**

<u>PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES</u> (4 ,5 points)

Déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en utilisant les barycentres pour déterminer des positions géométriques.
Afin d'alimenter deux villages A et B distants de 100m en eau potable, les élites du village font appel à trois ingénieurs.

- L'ingénieur 1 demande de construire des forages en des points M tels que $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=10000$
- L'ingénieur 2 demande de les construire en des points P tels que $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=-900$
- l'ingénieur 3 demande de les construire en des points N tels que $\frac{NA}{NB}=50$

Tache 1 : Déterminer l'ensemble des positions occupées par les forages en tenant compte de la proposition de l'ingénieur 1 **[1,5pt]**
Tache 2 : Où va-t-on construire les puits de forages si on tient compte de la conception de l'ingénieur 2 ? **[1,5pt]**
Tache 3 : Pour l'ingénieur 3 où doit-on positionner les puits de forages ? **[1,5pt]**

Bonne chance

t.me/KamerHighSchool