TEL : 697972248/676821509

Ministère des Enseignements Secondaires

Année scolaire 2020/ 2021

LE GRAND CREREX

ECOLE DE MATHS FACILES

Classe : *TERMINAL C*

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUE

PAR : FOTSO JULES

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) d'inconnue rationnelle x:(E) :$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v entiers relatifs.

1) On suppose que $\frac{14}{39}$ est solution de (E);

a) Prouver que les entiers u et v sont liés par la relation 14u +39v=1129.

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple (x ;y) d'entiers relatifs vérifiant 14x+39y=1. Vérifier que (−25;9) est solution de (E).

c) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de 14u +39v=1129. Donner la solution générale de cette équation.

d) Déterminer parmi les couples (u ;v) précédents, celui pour lequel le nombre U est l'entier naturel le plus petit.

2) a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 14.

b) Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (E), montrer que si p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors p divise 14 et q divise 78.

c) En déduire les nombres rationnels non entiers, pouvant être solution de (E) et écrire, parmi ces rationnels l'ensemble de ceux qui sont positifs.

EXERCICE 2

Le nombre n est un entier naturel donné. Les lettres x et y désignent les entiers supérieurs à 2n vérifiant (x-2n)(y-2n) = $2n^2$(1)

1-Démontrer que tout diviseur commun à x-2n et y-2n divise x et y.

2-En montrant que (1) se met sous la forme $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$, montrer que tout diviseur commun à x et y divise x-2n et y-2n.

3-Démontrer que tout diviseur commun à x et y divise n.

4-On suppose que n=30. Trouver tous les couples (x ;y) premiers entre eux vérifiant la relation (1).

EXERCICE 3

On considère le polynôme $p(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$

a) Démontrer que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution a $\in\mathbb{R}$ et que $0 < a < 1$

b) On suppose que a est une racine rationnelle de la forme $\frac{p}{q}$ où pet q sont deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que p divise 3et q divise 4

c)Déterminer alors la solution rationnelle a de l'équation $p(x) = 0$.

EXERCICE 4

1) Donner l'ensemble des diviseurs positifs de 97

2) Soit p un entier naturel tel que $0 < p < 97$.

a) Montrer que $97C_{96}^{p-1} = pC_{97}^{p}$

LE TRAVAIL ET UNIQUEMENT LE TRAVAIL

b) En déduire que $C_{97}^{p} \equiv 0[97]$.

c) Déduire que pour tout couple d'entiers naturels (a ; b),$(a+b)^{97} \equiv a^{97} + b^{97}[97]$

3) Montrer par récurrence que: pour tout n $\in \mathbb{N}*$ $n^{97} \equiv 1[97]$,

4) Soient m et n deux entiers naturels tels que m.n $\equiv$1[97]. Montrer que $n^{96} \equiv 1[97]$ et $m^{96} \equiv 1[97]$.

EXERCICE 5

1)Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation suivante notée: $5x - y = -3$.On remarquera que (1,8) est une solution particulière de cette équation.

2) On considère les suites (x_n) *et* (y_n) définies par: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$

a)Démontrer par récurrence que (x_n) *et* (y_n) sont les suites d'entiers naturels.

b) Démontrer par récurrence que $(x_n; y_n)$ est solution de l'équation $5x - y = -3$.

c) En déduire que si x_n et y_n ne sont pas divisible par 3, alors ils sont premiers entre eux.

3) On pose: $u_n = x_n + \frac{2}{3}$ *et* $v_n = y_n + \frac{1}{3}$

a) Démontrer que(u_n) *et* (v_n) sont des suites géométriques et exprimer x_n *et* y_n en fonction de n.

b) Les suites (x_n) *et* (y_n) sont-elles convergentes ?

EXERCICE 6

1-Comment faut-il choisir l'entier relatif n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit réel? Soit imaginaire pur?

2-soit n un entier naturel. On pose: $\boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $\boldsymbol{B} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$

a) Calculer et écrire sous forme exponentielle A + iB.

b) En déduire les expressions plus simples de A et B.

EXERCICE 7

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$Soient les points A (3;−2;2); B (6;1;5); C(6;−2;−1) et D(0;4;−1)

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

b) Ecrire une équation cartésienne du plan (P1) orthogonal à la droite (AC), passant par A.

c) Vérifier que le plan (P2) d'équation $\boldsymbol{x + y + z - 3 = 0}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.

4. Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $r = 5\sqrt{3}$.
5. a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ .En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC)

b) Calculer le volume v du tétraèdre ABCD

EXERCICE 8

LE TRAVAIL ET UNIQUEMENT LE TRAVAIL

Dans l'espace orienté, muni d'un repère orthonormé direct$(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$,

On donne: A(10;5;−10); B(−1;−15;17) ; C(2;20;21) et D(−10;5;5).

1. Justifier que ABC définit un plan, et donner l'équation de (ABC).
2. Calculer les coordonnées du point G isobarycentre des points A , B ,C et montrer que G est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

3.a) Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tel que: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MB}$=0. Donner une équation cartésienne de (E).

b) Déterminer l'ensemble(F) des points M de l'espace tels que: $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MD}=\vec{0}$
Donner une représentation paramétrique de (F) .
4.a) Détermine le milieu L du segment [GB] et calculer la distance de L à (F).En déduire la position relative de (E) et (F).
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|$ =12

EXERCICE 9

Partie A:

Soit u l'application de $[\pi/2;\ 3\pi/4]$ vers $[1/2\ ;1]$ définie par: $u(x)=sin^2(x)$.
On admet que u est bijective, on note u^{-1}sa bijection réciproque.
Déterminer l'ensemble D sur lequel u^{-1}est dérivable et déterminer pour tout x de D,(u^{-1})'(x).

Partie B:

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $v(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.
1) Démontrer que, pour tour x de $\mathbb{R}$, $v(x)\epsilon\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par: $\tan\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (On pourra remarquer que la fonction $x\longmapsto\tan(x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Partie C:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$-{−1;1} par: $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ et (Cf)sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal$(o;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité graphique: 2cm).
I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:$g(x)=x^3-3x+4$.
1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$, montrer que
$2<a<3$ puis déterminer une valeur approchée de a à 10^{-1} près par défaut.
3. Etudier pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $g(x)$.
II.1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes du Df ensemble de définition.
2) Montrer que, pour tour de $\mathbb{R}$-{-1;1}, $f(x)=x+1+\frac{x+1}{x^2-1}$. En déduire le tableau des variations
3)a) Montrer que, pour tour x de $\mathbb{R}$-{−1;1},$f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
b) En déduire que la courbe (Cf) admet une asymptote oblique (D) en −∞ et en +∞.
c) Etudier la position de (Cf)par rapport à (D).

EXERCICE 10

On considère la fonction f:[0;$\frac{\pi}{2}$ [→$\mathbb{R}$ qui à x ↦ $\frac{1}{\cos x}$.
1) Démontrer que f réalise une bijection de [0; $\frac{\pi}{2}$ [vers un intervalle à préciser.
2) Résoudre dans [0; $\frac{\pi}{2}$ [l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.
3) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f^{-1}et calculer $(f^{-1})'(x)$
4) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse √2
5) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{x}$ admet une unique solution $\alpha\ \epsilon\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.
6) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}près.
7)Montrer que pour tout x $\epsilon\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$; $\left|\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\sqrt{2}|x-\alpha|$.

LE TRAVAIL ET
UNIQUEMENT LE
TRAVAIL