Tel :697972248/676821509

Ministère des Enseignements Secondaires — Année scolaire 2020/ 2021

LE GRAND CREREX

TRAVAUX DIRIGES CONGES DE NOEL SERIE 2

THEME : GEOMETRIE DU PLAN . BARYCNTRES . EQUATIONS

Classe : PREMIERE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES :

Exercice2

On considère l'équation suivante: (E): $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ où x est l'inconnue, a , b et c sont des réels avec non nul.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Montrer alors que si x_0 est une solution de (E), alors $\frac{1}{x_0}$ est aussi solution de (E).
3. Montrer que: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ équivaut à $a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x+\frac{1}{x}\right) + d = 0$ où d est un nombre réel que l'on exprimera en fonction de a et c .
4. Résoudre alors l'équation : $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

Exercice2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points $A(-2;\ -2)\ ; B(-2; 4)\ ; C(1; 1)\ et\ D(-1; 3)$.

1. a) Déterminer les réels x ;y et z vérifiant le système $\begin{cases} 4x + 4y + z = -8 \\ 4x - 8y + z = -20 \\ -2x - 2y + z = -2 \end{cases}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Soit (C) le cercle de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + 3\cos\theta \\ y = 1 + 3\sin\theta \end{cases}$ ou $\theta \in\ ]-\pi\ ;\ \pi]$

a) Les points A et B appartiennent -ils à (C)? justifier.

b Ecrire une équation cartésienne de (C), puis préciser ses éléments caractéristiques

c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point A.

d) Calculer les coordonnées des points de rencontre de (C) avec la droite $(D): x + y - 1 = 0$.

Exercice3

1. On donne l'équation (E): $x^2 + x - 5 = 0$.On désigne ses racines par $x_1$et x_2 , Sans calculer $x_1$et x_2 ; Ecrire une équation du second degré qui admet pour racines ${x_1}^2\ et\ {x_2}^2$.
2. Résoudre dans IR l'inéquation: $x + \sqrt{x-1} \geq 3$.
3. Résoudre suivant les valeurs de m le système suivant : $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - my = \sqrt{2} - 1 \\ mx - (\sqrt{2}+1)y = 1 \end{cases}$.

Exercice4

1. On considère l'équation (E_m) :$(6-m)x^2 + (3m+1)x - 3 - 9m = 0$

a) Résoudre (E_m) pour $m = 6$.

b) Soit$m \neq 6$; déterminer pour que

i) (E_m) n'ait pas de solution.

ii) (E_m) ait une solution double à déterminer.

iii) (E_m) ait deux solutions distinctes à trouver.

iv) (E_m) ait deux solutions distinctes positives.
v) (E_m) ait deux solutions distinctes négatives.
vi) (E_m) ait deux solutions distinctes de signes contraires.
2. Dans $\mathbb{R}^2$,on considère le système (S) $\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 2m^2 - 1 \end{cases}$ où m est un paramètre réel.
a) Calculer tous les déterminants du système (S).
b) Déterminer les valeurs de m pour les quelles le système (S):
i) N'admet aucune solution.
ii) Admet une unique solution. Dans ce cas, préciser l'ensemble solution.
iii) Admet une infinité de solution. Dans ce dernier cas, préciser également l'ensemble des solutions.

Exercice7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(0;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, (Γ) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$tels que $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.
1.a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).
b) Déterminer les équations paramétriques de (Γ).
2. Quelle est la position relative de la droite (D):$x - y + 1 = 0$ par rapport à l'ensemble (Γ)?
3. (C) désigne le cercle du plan, de centre Ω(-1; 0) et de rayon $\sqrt{2}$.
a) Déterminer la position de (C) par rapport à (Γ).
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire a (D).
c) vérifier que $A(0; 1) \in (C)$ puis écrire une équation de la tangente a (C) au point A.

Exercice8

On rappelle que si (C) et (C') sont deux cercles de centre respectifs Ω et Ω' et de rayons respectifs r et r', (C) et (C')
ont deux points communs si et seulement si:$|r - r'| < \Omega\Omega' < \mathrm{r} + \mathrm{r}'$.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le point B a pour coordonnées (4; 4). On note (C) l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB} = 0$. On note aussi (C') le cercle d'équation cartésienne . $x^2 + y^2 - 9x - 4y + 18 = 0$.
1. Ecrire une équation cartésienne de (C) et en déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.
2. Préciser le centre Ω' et le rayon r' de (C').
3. Démontrer que ces deux cercles sont sécants.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux cercles.

Exercice9

Le plan affine euclidien orienté est rapport à un repère orthonormé direct $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (C) désigne le cercle de centre O et de rayon 1. On note I(1; 0), J(0; 1) et K(-1; 0). A le milieu du segment [OK]; (C') désigne le cercle de centre A passant par J.
1. a) Ecrire une équation cartésienne de (C').
b) (C') rencontre l'axe des abscisses en deux points dont l'un noté B a une abscisse positive x_B. Déterminer x_B.

2. On désigne par C le milieu du segment $[OB]$, la perpendiculaire en C à l'axe des abscisses coupe le cercle (C) en deux points dont l'un noté M, a une ordonnée positive. On pose $\alpha = (\vec{\imath}; \overrightarrow{OM})$.

a) Démontrer que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) En déduire $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$.

3. a) Résoudre dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; l'équation $\cos 2x = \cos 3x$.

b) En déduire la valeur exacte de α.

Exercice10

ABC est un triangle isocèle en C tels que et $AC = 5cm\ et\ AB = 6cm$.

1. On pose $G = \{(A; 1), (B\ ; 1), (C\ ; 2)\}$ et on considère l'ensemble (γ)des points du plan tel que $43 \leq MA^2 + MB^2 + 2MC^2 \leq 59$. Déterminer et construire l'ensemble (γ).

3. On suppose que le plan est muni du repère orthonormé$(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On donne dans ce repère les points $E(-3, -1)$, $F(3, -1)$, $H(0,3)$ et $K = \{(E; -1), (F\ ; 1), (H\ ; 1)\}$

a) Calculer les coordonnées du point puis le construire.

b) Quelle est la nature du quadrilatère EFKH? En déduire son Aire.

2. On considère la droite (D): $-x + 2y + 8 = 0$ et le cercle(C): $x^2 + y^2 - 2y - 99 = 0$.

a) Caractériser (C)

b) Justifier que le cercle(C) et la droite (D) se rencontre en deux points R et S dont on déterminera leurs coordonnées.

Exercice11

ABC est un triangle rectangle en C. Soit γ un nombre réel. I désigne le milieu de $[AB]$ et $G = \{(A; 1), (B\ ; 1), (C\ ; \gamma)\}$

1. pour quelle valeur de γ G existe ?
2. Que représente le point G pour le triangle ABC lorsque $\gamma = 1$?
3. Déterminer le lieu des points G lorsque γ varie dans $\mathbb{R} - \{-2\}$.
4. On considère la fonction définie pour tout point M du plan par: $f(M) = MA^2 + MB^2 + \gamma MC^2$

a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $f(M) = (\gamma + 2)MG^2 + f(G)$

b) Démontrer que $f(G) = \frac{\gamma+1}{\gamma+2}AB^2$.

5. Déterminer l'ensemble (E_γ)des points M du plan tels que: $f(M) = AB^2$.
6. Montrer que pour tout réel $\gamma \neq -2$, le point C appartient à (E_γ). En déduire une construction de (E_{-3}).

Exercice12

ABC est un triangle tel que AB=7; BC=4; AC=5 et I milieu du segment $[BC]$.

1. Démontrer que $AI = \sqrt{3}$.
2. a) Soit M un point du plan; Pour quelle valeur de m le vecteur $\vec{u} = m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

b) Pour cette valeur de m ; Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$

3. Soit D le barycentre des points pondérés (A, -1); (B, 1) et (C,1). a) Construire D.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que $\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \sqrt{3}$.

Exercice13

Le plan est muni d'un repère $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$; on considère A(0, 2), B(-2, 0) et C(2, 0) trois points du plan. On note G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).

1. Montrer que le point O est le milieu du segment [BC].
2. En déduire que le point G appartient à la droite(AO).
3. Déterminer les coordonnées du point G.
4. Montrer que pour tout point M du plan $AM^2 + OM^2 = 2MG^2 + 2$.
5. En déduire que l'ensemble (T) des points M tels que: $2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 28$
est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice14

I) Soit ABC un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et de [IC]; le point K est défini par: $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Exprimer K comme barycentre des points A et C.

a) Vérifier que: $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$.

b)En déduire que les points B, J et K sont alignés.

II) ABC est un triangle quelconque, G le milieu de [AB], E et F deux points définies par: $\overrightarrow{EB} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$.

1. Exprimer E et F comme barycentre des systèmes de points pondérés à préciser.
2. Montrer que les droites (AE), (BF) et (GC) passent par un point commun qu'on précisera.
3. Soit H le barycentre de $\{(B; 3), (F; -1)\}$. Montrer que H, F et G sont alignés.

III) ABC est un triangle rectangle en A et D un point du plan tels que $\overrightarrow{2AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

1. Montrer que D est le barycentre des points pondérés (A, 4); (B,-1) et (C, -1).
2. Soit K le milieu du segment [BC]; Montrer à l'aide d'un barycentre partiel que A est le milieu de [DK].
3. Soient P, Q et R trois points tels que: $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Montrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.
4. Utiliser le repère affine R= (A, B, C) pour montrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.
5. On suppose que $AB = 6$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que: $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$.

Exercice15

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de sens direct, de centre O et de coté 1. (unité 35mm). Soit G le barycentre des points (A, 1), (B, 2), (C,1).

1. a) Montrer que G est le milieu du segment [OB].

b) Construire le point G.

2. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que: $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6$.

a) Démontrer que pour tout point M du plan, on a: $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

Exercice16

ABC est un triangle équilatéral tel que: AB = 6cm. Soit (A, m); (B, 1) et (C, 1) des points pondérés.

1. a) Déterminer l'ensemble E des nombres réels tels que les points (A, m); (B, 1) et (C, 1) admettent un barycentre.

b) Que devient ce barycentre lorsque m = 1 ?

2. Soit f une fonction du plan telle que: $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

a) Calculer f(A), f(B) et f(C).
b) Montrer que f(M) = $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$où G est le centre de gravité du triangle ABC.
c) Montrer que $GA = GB = GC = 2\sqrt{3}$ cm.
d) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que f(M) = 72.

Exercice17

Soit A, B et C trois points non alignés. Soient D le barycentre de (B ;2), (C ; 4), E le barycentre de (B ;2), (A ;1), F le barycentre de (A ;1),(C ;4) et G le barycentre de (A ;1), (B ;2), (C ;4).
1. Construire les points D ; E ; F et G .
2. Démontrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en G.
3. déterminer et construire l'ensemble des points M tels que:
a) $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$; b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ C) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires; d) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires; b) . $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB} = 0$

Exercice18

ABCD est un carré de côté une unité; M un point du plan et O le centre du carré.
1. Préciser la nature exacte, puis les éléments caractéristiques éventuels de l'ensemble décrit par M dans chacun des cas :a) $MA^2 - MC^2 = -2$; b) $MA^2 + MB^2 = 2$; c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = -3$;
d) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Construire chacun de ces ensembles lorsqu'il n'est pas vide.

Exercice19 ABC est un triangle équilatéral tel que $AB = 4cm$. G le barycentre des points (A ;2) , (B ;2) et (C ;1). Soit (σ) l'ensemble des points M tels que: $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{7}$ et (δ) l'ensemble des points tels que: $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{3}$.
1. Montrer que A $\epsilon\ (\delta)$ et B $\epsilon(\sigma)$ que .
2. Déterminer (δ) et (σ) .
3. Construire le lieu des points M tels que: $4\sqrt{3} \leq \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{7}$.

Exercice23

Soient f ; g et h trois fonctions numériques d'une variable réelle définie par:
$f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ et $h(x) = x^2 + 2x$.
1. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions f ; g et h .
2. Déterminer les ensembles de définitions de chacune des fonctions fog , gof; foh ; hof ; goh et hog .
3. Donner une expression explicite de chacune des fonctions
, $fog(x), gof(x); foh(x); hof(x); goh(x) et\ hog(x)$. ,
4. Parmi les fonctions f ; g et h ,les quelles sont des applications?
5. a) $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ est-elle injective? surjective? justifier.
b) Montrer que $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ est une bijection puis définir sa bijection réciproque.
6. a) $g: [2; +\infty[\to \mathbb{R}$ est –elle injective? Surjective ?justifier.
b) Montrer que $g: [2; +\infty[\to [0; +\infty[$ est une bijection puis définir sa bijection réciproque.
7. a) est –elle injective? Surjective ? justifier.
b) Montrer que la restriction $h: [-1; +\infty[\to [-1; +\infty[$ est une bijection puis définir sa bijection réciproque.