

LYCEE BILINGUE DE MBOUDA		DEVOIR N°2		ANNEE SCOLAIRE 2020 - 2021
MATHEMATIQUES	Classe : Tle C	Durée : 4h	Coéf : 7	Examineur : ERICK KEUZEU

**Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES./15,5points**

**Exercice 1 : Arithmétique / 6 points**

I – Soit  $(E)$  l'équation d'inconnue  $x$  défini par :

$(E) : 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$  où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que  $\frac{14}{39}$  est solution de  $(E)$

- a) Prouver que les entiers relatifs  $u$  et  $v$  sont liés par la relation  $14u + 39v = 1129$  0,5pt  
b) Vérifier que  $(-25; 9)$  est une solution de l'équation  $14x + 39y = 1$  0,25pt  
c) Résoudre alors dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $14u + 39v = 1129$  0,5pt  
2. a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 78 et de 14 0,25pt  
b) Soit  $\frac{p}{q}$  une solution rationnelle de  $(E)$ . Montrer que si  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors  $p$  divise 14 et  $q$  divise 78 1pt  
c) En déduire les nombres rationnels non entiers pouvant être solution de  $(E)$ . 0,5pt

II – 1. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $\text{PGCD}(a + b; ab) = p$  où  $p$  est un nombre premier.

- a) Démontrer que  $p$  divise  $a^2$  (On pourra remarquer que  $a^2 = a(a + b) - ab$ ) 0,5pt  
b) En déduire que  $p$  divise  $a$  0,5pt  
c) Montrer que  $\text{PGCD}(a; b) = p$  0,5pt

2. On désigne par  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a \leq b$

- a) Résoudre le système  $\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 5 \\ \text{PPCM}(a; b) = 170 \end{cases}$  1,25pt  
b) En déduire les solutions du système  $\begin{cases} \text{PGCD}(a + b; ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a; b) = 170 \end{cases}$  0,25pt

III – Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $A = 3n + 1$  et  $B = 5n - 1$

1. Montrer que  $\text{PGCD}(A; B)$  est un diviseur de 8 0,75pt  
2. Déterminer l'ensemble des entiers  $n$  tel que  $\text{PGCD}(A; B) = 8$  1pt

**Exercice 2 : Complexes /5,25points**

I – 1 Soient  $a, b$  et  $c$  trois complexes non nuls de même module et vérifiant  $a + b + c = 0$

On pose  $p = \frac{a}{c}$  et  $q = \frac{b}{c}$

- a) Prouver que  $|p| = |q| = 1$  0,5pt  
b) Prouver que  $p + q = -1$  0,5pt  
2. En déduire que  $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $p = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  (on pourra poser que  $p = x + iy$ ) 1pt  
3. Soient  $(A, B$  et  $C)$  d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$   
a) Prouver que  $O$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$  0,5pt  
b) Prouver que  $A, B$  et  $C$  appartiennent à un même cercle de centre  $O$  0,5pt

II – Soit  $a$  un paramètre complexe non nul.

On considère l'équation  $(E) : Z^2 - a(1 + i)Z + ia^2 = 0$

1. a) Calculer  $(1 - i)^2$  0,25pt  
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$  1pt
2. On pose  $a = \varphi e^{i\sigma}$  où  $\varphi > 0$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$
- a) Mettre les solutions  $Z_1$  et  $Z_2$  sous forme trigonométrique 0,5pt  
b) Prouver que  $Z_1^{2n} + Z_2^{2n} = a^{2n}(1 + (-1)^n)$  0,5pt

### Exercice 3/ 2,5points

Soit  $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$  un repère orthonormé direct de l'espace

1. Soit  $G$  le centre de gravité de  $ABC$
- a) Déterminer les coordonnées de  $G$  0,5pt  
b) Montrer que :  $(OG) \perp (ABC)$  0,5pt
2. Soient  $A'(2; 0; 0)$ ;  $B'(0; 2; 0)$  et  $C'(0; 0; 3)$
- a) Calculer  $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$  0,5pt  
b) Déterminer une équation du plan  $(A'B'C')$  0,25pt
3. Déterminer les coordonnées du point  $K$  intersection de  $(AC)$  et du plan  $(A'B'C')$  0,75pt

### Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4,5points

TCHINDA, étudiant, effectue un stage dans une entreprise qui produit trois types d'huiles végétales. L'huile de type A est prête toutes les 1h 15 min, l'huile de type B toutes les 25 min et l'huile de type C toutes les 45 min. Le dernier jour de son stage, les trois types d'huiles étaient prêts à 8 heures et TCHINDA veut savoir à quelles heures de la journée ces trois types d'huiles seront prêts à la fois pour la dernière fois pour arrêter son stage, sachant que l'entreprise ferme à 18 heures.

Après la fermeture de l'entreprise, TCHINDA se rend à un spectacle. Le magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul suivant : «Prenez le nombre représentant le jour de votre naissance et multipliez – le par 12. Prenez le nombre représentant le mois de votre naissance et multipliez – le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner votre date d'anniversaire ». TCHINDA annonce 308 et quelques secondes après, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1<sup>er</sup> Août ».

- Tâche 1 : A quelles heures TCHINDA doit – il arrêter son stage ? 1,5pt  
Tâche 2: Le magicien a – t – il raison ? 1,5pt  
Tâche3 : Quelle est la date d'anniversaire de Sandra qui a annoncé 474 ? 1,5pt