Classe de Premières C-D-TI *Feuille2 de Travaux Dirigés de mathèmatiques: Trigonométrie et Espace vectoriel*

Exercice 1

Soit x un réel.

1. Montrer que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. En déduire que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

2. Montrer que $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. En déduire que $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

3. Jutifier que $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

4. **(a)** En utilisant les questions 1. et 2., déterminer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

(b) En utilisant la formule d'addition, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. On donne $\cos x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(a) En utilisant la question 1., calculer $\cos 2x$.

(b) En déduire la valeur de x, sachant que $x \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$.

Exercice 2

I. On se propose de calculer:

$$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} \text{ et } B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}.$$

1. Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

2. Calculer $A+B$ et $A-B$.

3. En déduire les valeurs de A et B.

II. On pose $I = 16\sin\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{11\pi}{24}$.

1. Montrer que : $\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$.

2. Vérifier que : $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{24} = \dfrac{7\pi}{24}$.

3. Montrer de deux manières différentes que $I = 1$.

III. Soit x est un nombre réel distinct de $k\pi$. On pose $A = 16\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x$.

1. En calculant $A \times \sin x$, montrer que $A = \dfrac{\sin 16x}{\sin x}$.

2. Déduire la valeur du nombre: $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$.

Exercice 3

I. Soit x un réel.

1. Ecrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2. En déduire que : $\tan 3x = \tan x \times \dfrac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$.

II. Soient x et y des réels.

1. Montrer que : $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$.
2. En déduire que : $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.

Exercice 7

1. Résoudre dans l'ensemble I indiqué, les équations suivantes (dans chacun des cas cas on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique).

   (a) $2\cos x = \sqrt{2}, \quad I = [-2\pi; 2\pi]$; **(b)** $3\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}, \quad I = [0; 2\pi]$;
   (c) $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right), \quad I =]-\pi; \pi]$ **(d)** $\sin 2x - 2\sin x \cos(x + \dfrac{\pi}{3}) = 0, \quad I = [-\pi; \pi]$;
   (e) $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad I = [-2\pi; 0]$; **(f)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos(x - \dfrac{\pi}{6}), \quad I =]-\pi; \pi]$.

2. Résoudre dans l'ensemble I indiqué, les équations suivantes (dans chacun des cas cas on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique).

   (a) $\cos x = 0, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(b)** $\sin x = 0, \quad I =]-\pi; \pi]$;
   (c) $\tan x = 0, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(d)** $\tan 2x = -\sqrt{3}, \quad I =]-2\pi; 2\pi]$;
   (e) $\cos x + \sin x = 0, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(f)** $-\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 1, \quad I = [0; 2\pi]$;

Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble I indiqué, les inéquations suivantes (dans chacun des cas cas on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique).

   (a) $\cos x \leq \sqrt{2}, \quad I = \mathbb{R}$; **(b)** $\sin 7x < -1, \quad I = [0; 2\pi]$; **(c)** $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) \geq -\dfrac{1}{2}, \quad I =]-\pi; \pi]$;
   (d) $\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - 1 \leq 0, \quad I = [0; 2\pi]$; **(e)** $\sin 2x > -1, \quad I = \mathbb{R}$;
   (f) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) - \cos(\dfrac{\pi}{3} - 2x) \leq 1, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(d)** $\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x \leq -1, \quad I =]-2\pi; 2\pi]$.

2. Résoudre dans l'ensemble I indiqué, les inéquations suivantes (dans chacun des cas cas on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique).

   (a) $\cos x \geq 0, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(b)** $\tan x \leq 3, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(c)** $\tan 2x > 0, \quad I =]-\pi; \pi]$;
   (d) $\sin x < 0, \quad I = [0; 2\pi]$; **(e)** $\cos x + \sin x \geq 0, \quad I =]-\pi; \pi]$; **(f)** $-\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$, $I = [0; 2\pi]$;

Exercice 5

I.

1. Démontrer que $\sin 5x = 16\sin^4 x - 20\sin^3 x + 4\sin x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x = 0$; vérifier que $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $16x^5 - 20x^3 + 4x = 0$.

4. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\sin\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$.

II. Soient x et y étant deux nombres réels de l'intervalle $[0;\pi]$, on considère le système d'équations
$(S)\begin{cases}\cos x\cos y &= \frac{\sqrt{3}+1}{4}\\ \sin x\sin y &= \frac{\sqrt{3}-1}{4}.\end{cases}$

1. Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant $\begin{cases}\cos(x+y) &= \frac{1}{2}\\ \cos(x-y) &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$
2. Résoudre (S).

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2t^2+\sqrt{3}t-3=0$.
2. Déterminer les nombres réels A et B tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on ait:
$\sqrt{3}\cos x+\sin x = A\sin(x+B)$.
3. **a)** Utiliser les résultats des questions **1.** et **2.** pour résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation (E) : $(2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x-3)(\sqrt{3}\cos x+\sin x-\sqrt{3})=0$.
   b) Représenter les images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

Exercice 7

1. **(a)** Vérifier que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $2X^2+(1-\sqrt{2})X-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $2X^2+(1-\sqrt{2})X-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.
2. Déduire de la question **1.(b)** la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation: $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.
3. Déduire de la question **1.(c)** la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation: $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$.
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

Exercice 8

1. **(a)** Calculer $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $x^2+(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $x^2+(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}\geq 0$.
2. Déduire de la question 1.(b) la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation: $\tan^2 x+(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$.
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.
3. Déduire de la question 1.(c) la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation: $\tan^2 x+(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}\geq 0$.
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

Exercice 9

1. **(a)** Calculer $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $-4x^2+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$.

   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $-4x^2+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-\sqrt{6}\leq 0$.

2. On se propose de résoudre l'inéquation (E) : $\cos 4x+(\sqrt{3}+2)\sin 2x=\sqrt{3}+1$.

   (a) Montrer que (E) est équivalente à (E') :.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $x^2+(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}\geq 0$.

Espaces vectoriels: Uniquement C

Exercice 1

P est un plan vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i}\,;\vec{j})$.
On concidère les vecteurs: $\vec{e}_1=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{e}_2=\vec{i}+3\vec{j}$.

1) Justifier que $B'=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de P.

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base B'.

3) Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(x;y)$ un vecteur de P dans la base B et $(x';y')$, ses coordonnées dans la base B'. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ dans la base B'.

5) **a)** Démontrer que $F=\{(x;y)\in P/x+3y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner pour F une partie génératrice, une base et sa dimension.

c) Soit G le sous-espace vectoriel du plan P engendré par le vecteur $\vec{e}_2$.
Déterminer le sous-espace vectoriel $F\cap G$ et en donner une base s'il y a lieu.

Exercice 2

On considère $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+2y-z=0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.

2. **a)** Montrer que E est engendré par deux vecteurs.

   b) Montrer que ces deux vecteurs sont libres.

   c) En déduire la dimension de E.

3. Démontrer que la famille (u,v,w) est liée où $u=(1\,;-2\,;3)$; $v=(5\,;0\,;-3)$ et $w=(17\,;-4\,;-3)$.

Exercice 3

On considère $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,-x+2y-z=0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.

2. **a)** Montrer que E est engendré par deux vecteurs.

   b) Montrer que ces deux vecteurs sont libres.

   c) En déduire la dimension de E.

3. Démontrer que la famille (u,v,w) n'est pas liée où $u=(1\,;-2\,;-3)$; $v=(5\,;0\,;-3)$ et $w=(17\,;-4\,;-3)$.

La bonne réussite est la preuve d'un travail bien fait.