TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUE

Equation et Inéquation

EXERCICE 1

1a calculer $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

b. Résoudre dans R l'équation $4x^2+\left(2\sqrt{2}-2\right)x-\sqrt{2}=0$.

c. Résoudre dans R l'inéquation $4x^2+\left(2\sqrt{2}-2\right)x-\sqrt{2}<0$.

2.a Résoudre dans R les équations $(E1): x^2-4x-5=0$ et $(E2): -x^2+2x+8=0$.

b. En déduire la résolution de l'inéquation $\frac{x^2-4x-5}{-x^2+2x+8}>0$.

EXERCICE 2

On considère le polynôme p défini par : $p(x)=2x^4+3x^3-16x^2+3x+2$.

1. vérifier que 0 n'est pas racine de p.

2.a Montrer que si x_0 est racine de p alors $\frac{1}{x_0}$ est aussi racine .

b. Calculer $p(2)$ et $p\left(-2-\sqrt{2}\right)$ puis résoudre dans R l'équation $p(x)=0$.

EXERCICE 3

1. Résoudre dans R^2 chacun des systèmes ci-dessous.

$a)\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{146}{55}\\ xy=55\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy=\frac{37}{2}\\ 2(x+y)-xy=4\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{-1}{3}(x-1)^2+y^2=1\\ 2(x-1)^2-\frac{y^2}{4}=17\end{cases}$ d) $\begin{cases}x^3+y^3=56\\ xy=-8\end{cases}$

2. Résoudre dans R^3 chacun des systèmes ci-dessous

a) $\begin{cases}2x+y+z=2\\ x+2y+z=2\\ x+y+2z=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+y+z=4\\ 2x^2-y-z=2\\ 3x^2+2y+4z=16\end{cases}$ c) $\begin{cases}2|x|-\sqrt{y-1}+z^2=1\\ -|x|+3\sqrt{y-1}+2z^2=2\\ 5|x|-2\sqrt{y-1}-z^2=3\end{cases}$

3. a En utilisant la méthode du pivot de gauss, déterminer le triplet$(x;y;z)$ solution du système (s)

$$\begin{cases}x+y+z=15\\ 11x-10y-z=-48\\ 10x+y-11z=27\end{cases}$$

b. Soit $\overline{abc}$ un nombre de 3 chiffres, ou a, b et c désignent respectivement les chiffres des centaines, des dizaines et des unités. Le nombre $\overline{abc}$ est tel que : la somme de ses chiffres est 15. Le nombre $\overline{bca}$ lui est supérieur de 432 et le nombre $\overline{cab}$ lui est inférieur de 243.

Déterminer le nombre $\overline{abc}$.

Fonctions et applications

Execice1

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5;3]$.

1. Quel est l'image de 1 par f et celle de -1 ?

2. Quel est l'image directe des intervalles $[-4;0]$; $[-2;3]$.

3. Combien d'antécédents possèdent 2 par f ? Justifier.

4. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-5;3]$.

5. Tracer en bleue la restriction de f sur $[-4;0]$.

6. déterminer les domaines de définition des fonctions suivante.

$g(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $h(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-1}$; $k(x) = \sqrt{2x^2 - x + 3}$ et $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$.

Execice2

I) On considère les fonctions f et g suivantes: $f(x) = 3x - 5$; $g(x) = \frac{x-5}{3x}$

a) Déterminer le domaine de définition de f(x) et g(x).

b) En déduire le domaine de définition de fog(x) et gof(x).

c. Calculer explicitement fog(x) et gof(x).

II) On considère la fonction f définie de [2;+∞[vers [1+∞[par $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

a) Démontrer que la fonction f est bijective

b) Expliciter sa bijection réciproque f^{-1}

c) Comment peut-on obtenir la courbe Cf^{-1} *a partir de la courbe de Cf? .Ecrire la fonction* $f(x) = \frac{|x^2-x-1|}{x^2}$ *sans symbole valeur absolue.*

Barycentres et ceecles

A) Soit ABC un triangle équilatéral de côté a,I le milieu du segment [BC] et G= bar{(A,1) ;(B,1) ;(C,2)}

1-a) Montrer que G est le milieu du segment [AI]

b) Exprimer IA en fonction de a puis GA en fonction de a (on pourra se servir d'un schéma)

B) $ABCD$ est un parallélogramme et I le milieu du segment$[AB]$. Les droites (DB) et (CI) se coupent en un point G.

1) Montrer que G est le centre de gravité du triangleABC. $(0{,}5\ pt)$
2) On donne $K = bar\ \{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$
   a) Montrer que les points K, I et C sont alignés puis construire$K$. $(1\ pt)$
   b) Montrer que $K = bar\ \{(G,3);(C,-2)\}$.$(0{,}5\ pt)$
3) a) Déduire de (1) que $A = bar\ \{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$. $(0{,}5\ pt)$
   b) Montrer A est le milieu de $[DK]$. $(0{,}5\ pt)$

C) Le plan affine euclidienne est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$; on considère les points $A(1;2)$; $B(2;1)$ et $C(3;-2)$.

1) Trouver une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC. $(1\ pt)$
2) On considère $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles d'équations cartésiennes respectives :

$(\mathcal{C})$:$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$ et $(\mathcal{C}')$:$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3$=0

a) Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$. $(1\ pt)$

b) Vérifier que le point $C \in (\mathcal{C})$ et donner une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle $(\mathcal{C})$ en C.

c) Soit (D) la droite d'équation cartésienne $x - y + c = 0$; déterminer c pour que (D) soit une tangente commune à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

d) Construire $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$, (T) et (D) dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.