LYCEE BILINGUE DE DSCHANG | *Evaluation N°3 du 23/12/2020*

Année Académique:2020-2021 | *Epreuve : MATHEMATIQUES*

Département de Mathématiques | *Niveau : Terminale ; Série : C*

Examinateur : M. KITIO NANKIA | *Durée : 04h00' ; Coef : 7*

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 1 : 04 points

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on conclure pour l'équation (E) ? **0,5pt**
   b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k\,; 68 + 109k)$ où k est un entier relatif. **0,25pt**
   c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d, inférieur ou égal à 226 et un entier naturel non nul e, tels que 109d=1+226e . **0,5pt**
2. Démontrer que 227 est un nombre premier. **0,5pt**
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$. On considère les fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
   - à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;
   - à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

   a) Vérifier que $g[f(0)] = 0$. **0,25pt**

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat : ***« si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors $a^{P-1} \equiv 1[P]$ ».***

   b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1[227]$. **0,25pt**
   c) En utilisant la question 1.b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[g(a)]$? **0,75pt**
4. a) Démontrer que pour tout n $\in \mathbb{Z}$, $n + 2$ et $2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux. **0,5pt**
   b) Déduire les entiers relatifs n pour lesquelles la fraction $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{n+2}$ est un entier. **0,5pt**

Exercice 2 : 02,75 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal$(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme complexe $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Démontrer que si $P(z_0) = 0$ alors $P(\overline{z_0}) = 0$. **0,25pt**
2. a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 4x + \lambda$. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. **0,5pt**
   b) En déduire que le polynôme P possède au moins une racine réelle que l'on notera α. **0,25pt**
3. a) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation sin3θ =sinθ. **0,5pt**
   b) Soit z un nombre complexe non nul de module 2 et d'argument θ. Donner les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $P(z) = 0$ admet une racine complexe non réelle de module 2. **0,75pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}P(z) = 0$ pour $\lambda = 8\sqrt{2}$. **0,5pt**

Exercice 3 : 05,25 points

I. Soit la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par$f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Etudier les variations de la fonction f.(on ne demande pas le tableau de variation) **0,5pt**
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $]-1; 1[$. **0,75pt**
   b) Donner un encadrement de β à 10^{-2} près et montrer que $\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\beta}{1+\beta}$. **0,75pt**
   c) Déduire le signe de $f(x) - x$. **0,5pt**

II. Soit la fonction g définie sur $]-1; 1[$ par $g(x) = f\left[-sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$

1. Montrer que pour tout $x \in]-1; 1[$, $g(x) = -1 - tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. **0,25pt**
2. Montrer que g établit une bijection de $]-1; 1[$ vers $\mathbb{R}$. **0,5pt**
3. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi[1+(x+1)^2]}$. **0,75pt**

III. Soit la fonction f définie pour tout réel x différent de -1 par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $(f)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. **0,75pt**

IV. Montrer que $Q = \left(\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}\right)^{\frac{1}{4}}$ est un entier. **0,5pt**

Exercice 4 : 03,5 points

I. Dans l'espace muni d'une repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les points C, D et E de coordonnées respectives (2 ;0 ;1), (3 ;-2 ;0) et (2 ;8 ;-4). La figure n'est pas demandée.

1. Soit le point N de coordonnées (x ;y ;z), exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{CN} \wedge \overrightarrow{DN}$. **0,5pt**

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11. \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$ **0,75pt**

3. Montrer qu'il existe un unique un unique point K vérifiant $\overrightarrow{CK} \wedge \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{EK}$ et donner les coordonnées du point K. **0,5pt**

4. a) Montrer que le volume du tétraèdre CDEK est $\frac{1}{6}EK^2$. **0,25pt**

b) En utilisant les résultats du 1., et en prenant N =E, calculer l'aire du triangle CDE. **0,5pt**

c) En déduire la distance du point K au plan (CDE). **0,25pt**

II. soit A et B deux points de l'espace orienté $\mathcal{E}$ tel que : AB =6. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 24$. **0,75pt**

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Un groupe d'ingénieur de contrôle minier doit inspecter une zone d'exploitation d'or à Bétaré-Oya. Le groupe est équipé d'un drone de reconnaissance de la présence d'or ainsi que des activités d'exploitations illicites de l'or. Ce drone fournit un repérage en modèle complexe à l'échelle kilométrique (c'est-à-dire à l'aide des nombres complexes d'unité graphique 1km) des points GPS de la zone. Le sondage artificiel du sol effectué par le drone dans une zone précise de forme circulaire estime une densité de 15kg d'or exploitable par Km² et ces photographies montrent que les exploitants illicites se trouvent dans la zone quadrillé par les points solution de l'équation complexe $-iz^4 + 8(-i+\sqrt{3}) = 0$.

Avec la somme reçu par la commune de Bétaré-Oya pour le développement de la localité suite à la vente de cet or après exploitation, le maire souhaite aménager un espace sur lequel sera construit un ouvrage d'art. Pour cela il recrute des ouvriers pour l'aménagement du site pour un prix de 1200Fcfa le m². Les dimensions du site ne sont pas données, mais dans le cahier de charge qui leur est remis, il est écrit : « l'ouvrage sera réalisé sur un terrain qui a la forme d'un triangle rectangle donc le plus grand côté et la base vérifient le système $\begin{cases} pgcd(a;b) = 10 \\ ppcm(a;b) = 280 \end{cases}$ avec a-b = 30.

L'arrondissement de Bétaré-Oya et ces neuf communautés villageoises qui la constituent perçoivent des taxes d'une entreprise qui exploite leur forêt communautaire. Le montant global de cette taxe en millions de Fcfa à la n-ième année d'exploitation est $t(n) = 2^n - 1$. Pour éviter les problèmes entre communautés, cette taxe n'est perçue que lorsque $t(n)$ est un multiple de 9, reparties de manière équitable aux 9 communautés avec obligation de réalisation d'au moins un projet par communauté.

Tâches :

1. Quelle est la quantité en gramme, d'or en situation d'exploitation illicite dans la zone inspectée par ces ingénieurs ? **1,5pt**
2. Quel est le montant maximal que percevrons les ouvriers ? **1,5pt**
3. Quel est le nombre minimal de projet que pourra réaliser toutes les communautés villageoises sachant que l'entreprise va exploiter la forêt pendant 43 ans ? **1,5pt**