



Classe	Epreuve de Mathématiques	Séquence n° 2	Coef	Durée
TD	Année 2020/2021		4	4H

PARTIE A : évaluation des ressources (15,5pts)

Exercice 1 : 4,75pts

On considère le nombre complexe $z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}$

- 1) Ecrire z sous la forme algébrique. 0,5pt
- 2) Montrer que z est solution de l'équation z et $\bar{z}$ sont solutions de l'équation $z^2 - 2z + \frac{5}{4} = 0$ 0,5pt
- 3) Soit la fonction définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = 4x^3 - 4,5x^2 + 4x - 4,5$
 - a) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $[1; 2]$ tel que $f(x) = 0$. 0,5pt
 - b) Donner un encadrement au centième près de α . 0,5pt
 - c) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$, alors ($f(x) = 0$ entraîne $f(\bar{x}) = 0$). 0,5pt
 - d) Démontrer que $f(i) = 0$ et en déduire de la question 3), l'autre solution imaginaire pure de $f(x) = 0$. 1pt
 - e) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(x) = 0$. 0,5pt
- 4) Montrer que $Q = \left(\frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt{\sqrt{64} \times \sqrt[5]{7776}}}{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{\sqrt{256}}} \right)^{\frac{1}{4}}$ est un entier. 0,75pt

Exercice 2 : 4 pts

La fonction numérique f est définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de f . 0,5pt
2. Soit (u_n) la suite numérique telle que $\begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$
 - 2.1. Démontrer par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$. 1pt
 - 2.2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n-2u_n^2}{2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n)}$ 0,5pt
 - 2.3 En déduire que (u_n) est croissante. 0,5pt
 - 3.1 Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} \frac{u_n - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1}$. 0,5pt
 - 3.2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|$. 0,25pt
 - 3.3 Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$. 0,5pt
 - 3.4 En déduire la limite de la suite (u_n) . 0,25pt

Exercice 3 : 3,5pts

Soit $z_1 = (1+i)^5 \cdot (1+i\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1+i}{-i(1+i\sqrt{3})}$ deux nombres complexes

1. Déterminer le module de z_1 et z_2

1pt

2. On munit le plan du repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A tout point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ on associe l'afixe $m = x + iy$ différent de $1+i$, on pose $Z = \frac{m-1+i\sqrt{3}}{m-1+i}$

a) Ecrire Z sous la forme algébrique

1pt

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M pour que Z soit un imaginaire pure.

0,5pt

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M tels que Z soit un réel.

0,5pt

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_3$ des points M tels que $|Z|=1$.

0,5pt

Exercice 4 : 3,25pts

Soit les fonctions définies par $f(x) = \frac{1+x}{x^3-1}$ et $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

A/ 1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

0,75pt

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1,68; -1,67[$.

0,5pt

3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

0,5pt

B/ 1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

0,75pt

2. Donner les équations des asymptotes à la courbe de f .

0,75pt

3. a. Montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x^3-1)^2}$ puis étudier son signe.

0,75pt

b. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{2}{3}\alpha - 1$, étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

1pt

4. On considère h la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$

a. Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

0,5pt

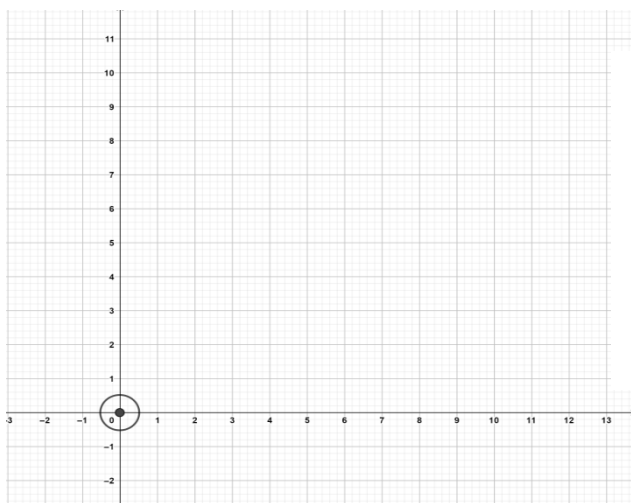
b. Dresser le tableau de variation de h^{-1} , représenter h puis h^{-1} .

0,5pt

PARTIE B: évaluation des compétences (4,5pts)

Situation :

Les perspectives économiques faites par un ingénieur pour un pays ont été réalisées sur la base du déficit x_n (%) et du taux d'inflation y_n (%) en valeur scalaires. Il représente cela à l'aide d'une suite récurrente (z_n) définie par et $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n$ où n désigne le nombre d'année et $z_n = x_n + iy_n$. En 2020, le déficit est de 8% et l'inflation de 15%. La zone de confort économique prévisible est représentée par un disque de rayon 0,5 et de centre le point O , représentant des points associées aux deux paramètres économiques comme l'indique la figure ci-dessous.



Tâches :

1) La zone de confort sera-t-elle atteinte en 2024 ? **1,5pt**

2) La zone de confort sera-t-elle atteinte en 2035 ? **1,5pt**

3) Ce pays sera-t-il développé en 2050 ? **1,5pt**