Classe	Epreuve de Mathématiques	Séquence n^0 2	Coef	Durée
Tc	Année 2020/2021		7	4H

PARTIE A : évaluation des ressources (15,5pts)

Exercice 1 : 2,5pts

On considère le nombre complexe $z=\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}+\frac{i}{2}$

1) Ecrire z sous la forme algébrique. **0,5pt**
2) Montrer que z est solution de l'équation z et $\overline{z}$ sont solutions de l'équation $z^2-2z+\frac{5}{4}=0$ **0,5pt**
3) Déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $(4z^2-8z+2)+i(z+1)^2+3=4i$ **0,5pt**
4) Montrer que $Q=\left(\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}\right)^{\frac{1}{4}}$ est un entier. **1pt**

Exercice 2 : 3,5 pts

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{3+2n}{2^n}$ $\forall$ n$\in\mathbb{N}^*$ **0,75pt**
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{2}{x-1}$
   (a) Déterminer f' et f''. **0,5pt**
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ≥ 1, $f^{(n)}=\frac{2(-1)^n\times n!}{(x-1)^{n+1}}$ **0,75pt**
3. (a) Trouver les entiers naturels strictement supérieurs à 1 dont les cubes divisent 18360. **0,5pt**
   (b) En déduire dans $\mathbb{N}$, la résolution de l'équation $b^3(2b^2+2b+1)=18360$. **0,5pt**
   (c)Un nombre s'écrit 36723 dans le système décimal et $\overline{442003}$ en base b. Déterminer b. **0,5pt**

Exercice 3 : 6,25pts

A/On considère l'équation (E) : $x^2-5y^2=1$ où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0;y_0)$ est solution de (E).
   a. Démontrer que x_0 *et* y_0 sont premiers entre eux. **0,25pt**
   b. Prouver que x_0 *et* y_0 n'ont pas la même parité. **0,5pt**
   c. Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0=5k+1$ *ou* $x_0=5k-1$. **0,25pt**
2. a. Démontrer, par récurrence, que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, il existe $a_n,b_n\in\mathbb{N}$ *tels que* $(9+4\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$ **0,5pt**

b. Donner a_1 *et* b_1 puis exprimer a_{n+1} *et* b_{n+1} en fonction *de* a_n *et* b_n. **1pt**
c. Montrer à l'aide d'une récurrence que les couples $(a_n;b_n)$ sont solutions de (E) . **0,5pt**
d. En calculant $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ *et* $\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{5}}$, montrer que $(9-4\sqrt{5})^n=a_n-b_n\sqrt{5}$. **0,5pt**
e. En déduire les expressions de a_n et b_n *en fonction de* n. **0,5pt**

B/ On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1): $ax+by=60$; (a et b etant des entiers naturels donnés tels que $ab\neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

1. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_0,y_0). Montrer que d divise 60. **0,25pt**
2. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0,y_0) de l'équation (1). **0,25pt**
3. On considère l'équation : (2): $24x+36y=60$. (x et y entiers relatifs).
   (a)Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2). **0,5pt**
   (b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. **0,75pt**

(c)Énumérer tous les couples (x, y) solutions de (2) et tels que $-10 \leq x \leq 10$. Donner parmi eux , ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. **0,5pt**

Exercice 4 : 3,25pts

A) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 2-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

1. **(a)** Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[$, $g'(x) = -3x\sqrt{x^2+1}$. **0,5pt**

(b) Dresser le tableau de variation de g. **0,5pt**

2. **(a)** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ et vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$. **1pt**

B) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1$. Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : 2cm)

1. **(a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$. **0,5pt**

(b) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **0,5pt**

(c) Dresser le tableau de variation de f. **0,5pt**

2. Montrer que la droite (D) : $y = -x+3$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$. **0,5pt**

3. Montrer que $\forall x \geq 0, x-\sqrt{x^2+1} < 0$. En déduire la position relative de C_f et (D). **0,75pt**

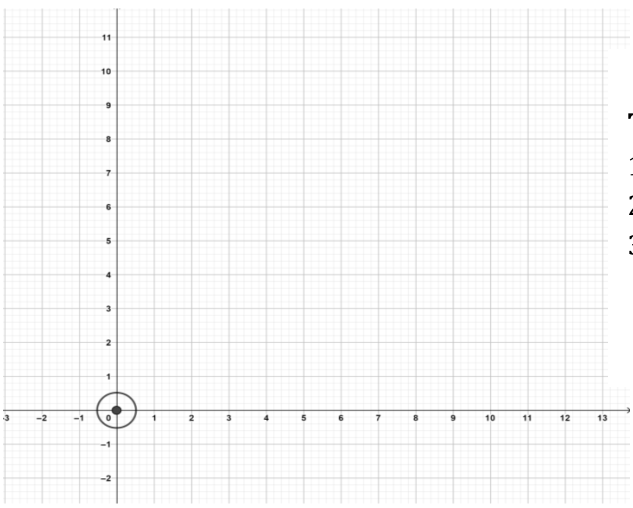
4. **(a)** Montrer que $\sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{2}{\alpha^2+1}$ et en déduire que $f(\alpha) = \alpha^3+1$. **0,5pt**

(b) Tracer (D) et C_f. On prendra $\alpha \approx 0,75$. **0,75pt**

PARTIE B: évaluation des compétences (4,5pts)

Situation :

Les perspectives économiques faites par un ingénieur pour un pays ont été réalisées sur la base du déficit x_n (%) et du taux d'inflation y_n (%)en valeur scalaires . Il représente cela à l'aide d'une suite récurrente (z_n) définie par et $z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$ où n désigne le nombre d'année et $z_n = x_n + i\, y_n$. En 2020, le déficit est de 8% et l'inflation de 15 %. La zone de confort économique prévisible est représentée par un disque de rayon 0,5 et de centre le point O, représentant des points $M_n(x_n , y_n)$ associées aux deux paramètres économiques comme l'indique la figure ci-dessous.



Tâches :

1) La zone de confort sera-t-elle atteinte en 2024 ? **1,5pt**

2) La zone de confort sera-t-elle atteinte en 2035 ? **1,5pt**

3) Ce pays sera-t-il développé en 2050 ? **1,5pt**