COLLÈGE BILINGUE DU CENTRE — **Année scolaire 2020/2021**
BP : 8370 Douala — **Classe : TleD Durée : 3h coef : 4**
Examinateur : TOUMBOURKEWA Pacôme

EVALUATION SOMMATIVE No 1 DE MATHEMATIQUES

EVALUATION DES RESSOURCES

EXERCICE 1

1 - Démontrer par récurrence chacune des propositions suivantes :
a - Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
b - Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$;
c - Pour tout entier naturel n, $5^{2n} - 4^n$ est un multiple de 7.
2 - On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
a - Calculer u_1, u_2, u_3.
b - Démontrer par récurrence que lq suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 2

I/ On considère l'équation (E) : $z^3 - (3+7i)z^2 - (13-15i)z + 6i + 18 = 0$ où z désigne un nombre complexe.
1 - Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure, noté z_0.
2 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3 - Déterminer le conjugué et le module de chacune des solutions.
II/ On considère le polynôme complexe P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 52$.
1. Montrer que si z_0 est une racine de P, alors $\bar{z_0}$ est une racine de P. (On pourra remarquer que $P(\bar{z_0}) = \overline{P(z_0)}$)
2. Vérifier que $2i$ est une racine de P, puis utiliser la question II-1) pour déduire une autre racine de P.
3. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2+4)(z^2+az+b)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 3

Soit z un nombre complexe distinct de $-i$. Soit Z un nombre complexe tel que $Z = \dfrac{z+2-i}{z+1}$.
1. On pose $z = x + iy$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tel que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tel que $|Z| = 1$.

EXERCICE 4

On considère la suite de termes complexes (z_n) définie pa : $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = (1+i)z_n$. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = |z_n|$
1 - Calculer z_0.
2 - Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme et la raison.
3 - Exprimer u_n en fonction de n puis calculer la limite de (u_n).

EVALUATION DES COMPETENCES

Le 1er janvier 2016 la population d'une ville est de 20 000 habitants. Cette population augmente de 5% chaque année par les naissances et reçoit aussi par an 1000 immigrants. On note par U_0 le nombre d'habitants de cette ville le 1er janvier 2016 et U_n, le nombre d'habitants le 1er janvier $2016 + n$.
1- Donner l'estimation de la population de cette ville au 1er janvier 2019. (1,5pt)
2- Exprimer en fonction de n le nombre d'habitants de cette ville le 1er janvier $2016 + n$. (1,5pt)
3- Sachant que la population scolaire de la ville représente les 20% des habitants et qu'il faut un enseignant pour 40 élèves, donner une estimation du nombre d'enseignants dans la ville au 1er janvier 2022. (1,5pt)