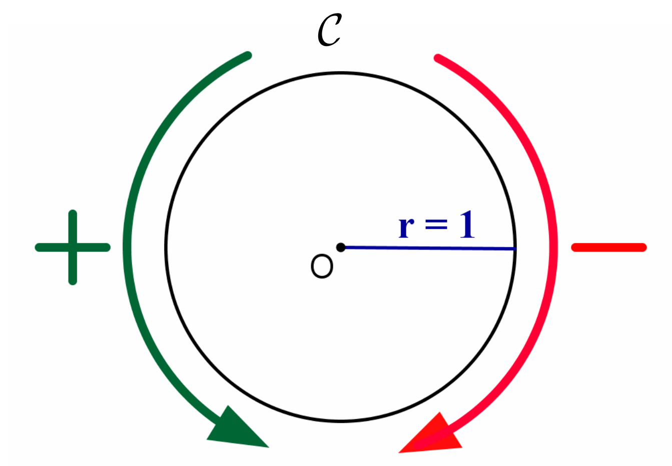
CHAPITRE I

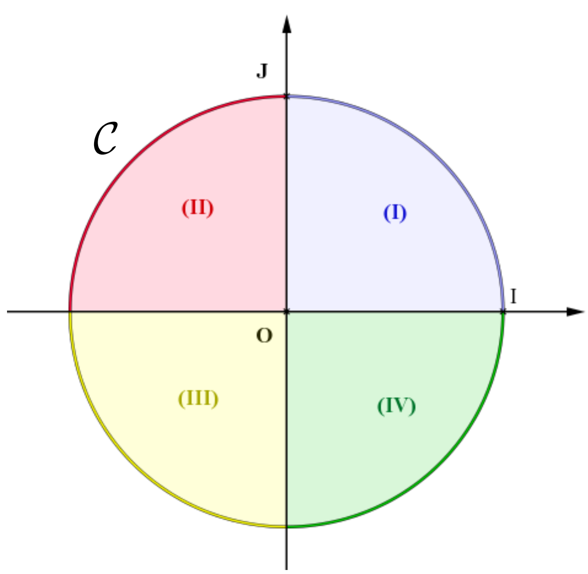
TRIGONOMETRIE

1) Le cercle trigonométrique

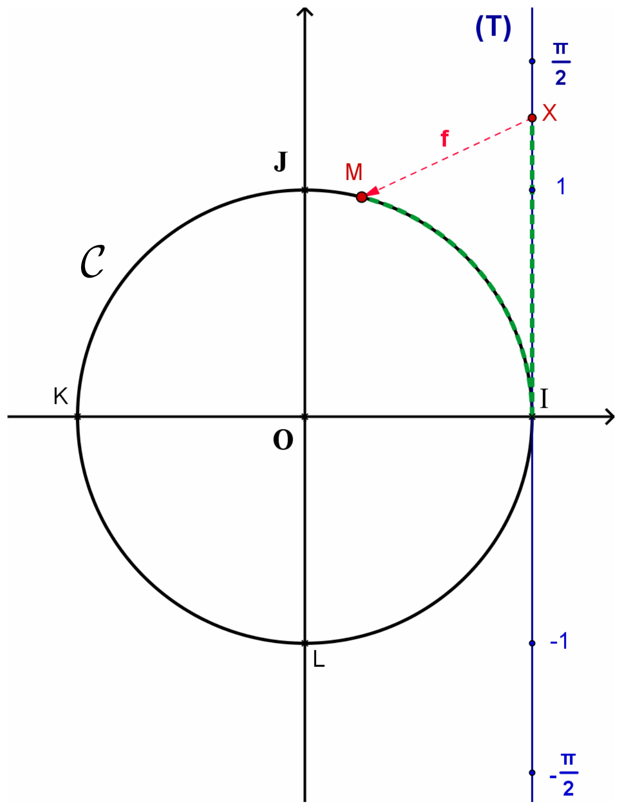
- Un **cercle trigonométrique** est un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 qui est *orienté*, ce qui veut dire qu'on a choisi un **sens positif (celui des ronds-points)** et un **sens négatif (celui des aiguilles d'une montre)** :



- Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et I, J deux points de $\mathcal{C}$ tel que $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est un R.O.N. du plan. Alors les axes OI et OJ subdivisent le cercle en quatre **quadrants** notés : (I), (II), (III) et (IV) :



- Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ en I munie du repère $\left(I,\overrightarrow{OJ}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ et $X(x) \in (T)$:



En « enroulant » (T) autour de $\mathcal{C}$ à partir du point fixe commun I (vers « le haut » dans le sens positif, vers « le bas » dans le sens négatif), on voit qu'à tout réel x on peut associer un point unique $M \in \mathcal{C}$. Nous noterons $f(x) = M$ cette correspondance.

En remarquant que le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $p = 2\pi$ puisque son rayon vaut 1, on a :

$$f(\pi) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots =$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots =$$

$$f(\ ) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots = L$$

$$f(0) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \ldots =$$

Et de manière générale : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)}$

En effet, ajouter $k \cdot 2\pi$ à x revient à faire *k tours complets* à partir de $f(x) = M$ dans un sens ou dans l'autre (selon le signe de k) pour retomber sur le même point M que x !

- Ainsi l'ensemble des nombres $x + k \cdot 2\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) caractérise le point M et donc également l'**angle** $\widehat{IOM}$. De plus si $x \in [0, 2\pi]$ alors x est égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ donc tout nombre de la forme $x + k \cdot 2\pi$ est une mesure de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ à un multiple entier de 2π près ! Ceci nous amène à poser la définition suivante :
- **Définition**

  Les nombres $x + k \cdot 2\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) sont les mesures en **radians (rd)** de l'angle $\widehat{IOM}$ et aussi de l'arc $\overset{\frown}{IM}$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{mes}\widehat{IOM} = \operatorname{mes}\overset{\frown}{IM} = x + 2k\pi \quad \text{rd}}$$

- *Exemples :*

$$\operatorname{mes}\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\operatorname{mes}\widehat{IOK} = \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\operatorname{mes}\widehat{IOL} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Chaque angle a donc
  - une infinité de mesures, mais la différence entre deux mesures est toujours un multiple entier de 2π si on mesure en rd, un multiple entier de 360 si on mesure en degrés.,
  - <u>une seule</u> mesure comprise entre 0 rd et 2π rd : c'est la **plus petite mesure positive**.
  - <u>une seule</u> mesure comprise entre $-\pi$ rd et π rd : c'est la **mesure principale**.
- Correspondance entre degrés et radians : $\boxed{\pi \text{ rd} = 180°}$.

  Les transformations se font par une *règle de trois* :

$$\begin{cases} 180° = \pi \quad \text{rd} \\ 1° = \dfrac{\pi}{180} \quad \text{rd} \\ x° = \dfrac{x \cdot \pi}{180} \quad \text{rd} \end{cases} \quad \text{respectivement :} \quad \begin{cases} \pi \quad \text{rd} = 180° \\ 1 \quad \text{rd} = \dfrac{180°}{\pi} \\ x \quad \text{rd} = \dfrac{x \cdot 180°}{\pi} \end{cases}$$

  Exemples :

$$0° = 0 \text{ rd}, \ 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rd}, \ 45° = \frac{\pi}{4} \text{ rd}, \ 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rd}, \ 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rd}.$$

2) Fonctions trigonométriques

a) Fonctions sinus et cosinus

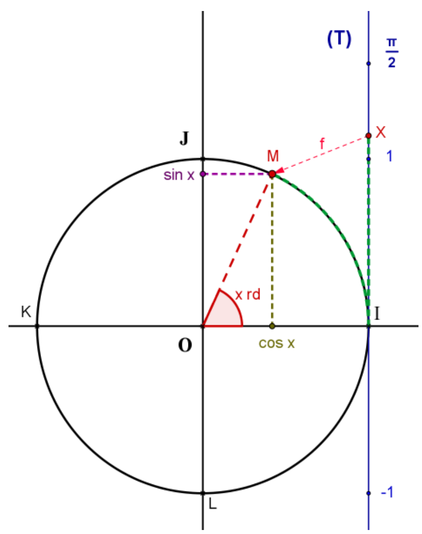
- **Définitions**

  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = M \in \mathcal{C}$ (voir 1)), alors:

  - l'abscisse de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est appelée **cosinus de x** (ou cosinus de *l'angle* $\widehat{IOM}$) et est notée **cos x**.
  - l'ordonnée de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est appelée **sinus de x** (ou sinus de *l'angle* $\widehat{IOM}$) et est notée **sin x**.

- Ainsi dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ on a **M(cos x, sin x)**, c'est-à-dire

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin x \cdot \overrightarrow{OJ}}$$



- Propriétés immédiates

  - Les fonctions sin x et cos x existent pour tout réel x, donc $\boxed{D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}}$
  - $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq 1}$

    Ceci est évident puisque le rayon de $\mathcal{C}$ vaut 1.

  - $\boxed{\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \, (k \in \mathbb{Z}) \text{ et } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \, (k \in \mathbb{Z})}$

    En effet d'après la figure ci-dessus :

    $$\sin x = 0 \Leftrightarrow M = I \text{ ou } M = K \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots\}$$
    $$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}\cos x = 0 &\Leftrightarrow M = J \text{ ou } M = L\\ &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+3\pi, \ldots, \frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi, \ldots\right\}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \,(k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

- Le signe de cos x et de sin x dépend du quadrant dans lequel se trouve M :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin x \geq 0 & \Leftrightarrow M \in (I)\cup(II) & \Leftrightarrow 0+2k\pi \leq x \leq \pi+2k\pi \\ \sin x \leq 0 & \Leftrightarrow M \in (III)\cup(IV) & \Leftrightarrow \pi+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi \\ \cos x \geq 0 & \Leftrightarrow M \in (I)\cup(IV) & \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \cos x \leq 0 & \Leftrightarrow M \in (II)\cup(III) & \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi \end{array}}$$

- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x+2k\pi) = \cos x}$

  Ceci découle immédiatement du fait que $f(x+k\cdot 2\pi) = f(x)$ et on exprime cette propriété en disant que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période** 2π.

- *Remarque*

Soit ABC un **triangle rectangle** en A et x la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. En classe de 4^e vous avez défini $\cos x$ et $\sin x$ par :

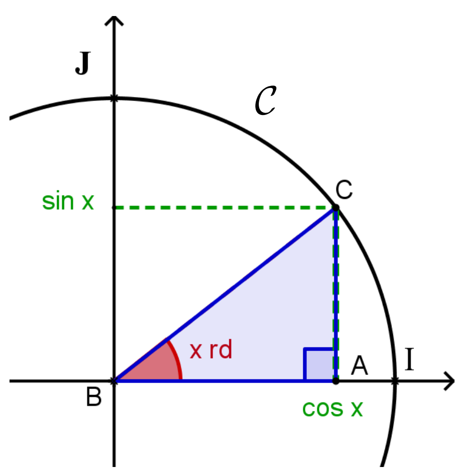
$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \text{ et } \sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Montrons que ces définitions, valables uniquement pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sont compatibles avec celles, plus générales, que nous venons de voir en utilisant le cercle trigonométrique. Pour cela nous allons distinguer deux cas :

1^er cas : $\overline{BC} = 1$

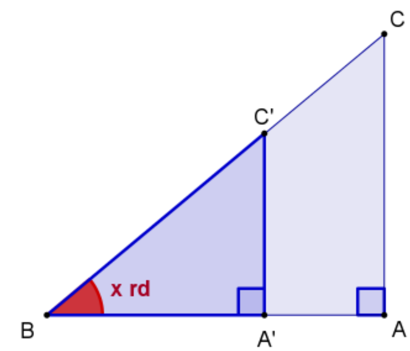
Alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par C est un cercle trigonométrique et en choisissant convenablement le R.O.N. d'origine B on a : $\cos x = \overline{AB}$ et $\sin x = \overline{AC}$:

Et comme $\overline{BC} = 1$ on a bien $\cos x = \overline{BA} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ et $\sin x = \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.



2^e cas : $\overline{BC} \neq 1$

Prenons par exemple $\overline{BC} > 1$ (le cas $\overline{BC} < 1$ étant analogue) et notons C' le point de $[BC]$ tel que $\overline{BC'} = 1$ et A' le point de $[BA]$ tel que $\Delta(BA'C')$ est rectangle en A'. Comme $AC \parallel A'C'$ on a d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$.



Or $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}}$ et comme $\cos x = \dfrac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}}$ d'après le 1^er cas appliqué au triangle $\Delta(BA'C')$, on a bien $\cos x = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$. On montre de même que $\sin x = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

- **Valeurs remaquables**

Vous avez montré en classe de 4e que $\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, que $\sin\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Or $f(0) = I(1,0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = J(0,1)$ donc $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. D'où le tableau des valeurs remarquables suivant :

x (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

b) Fonctions tangente et cotangente

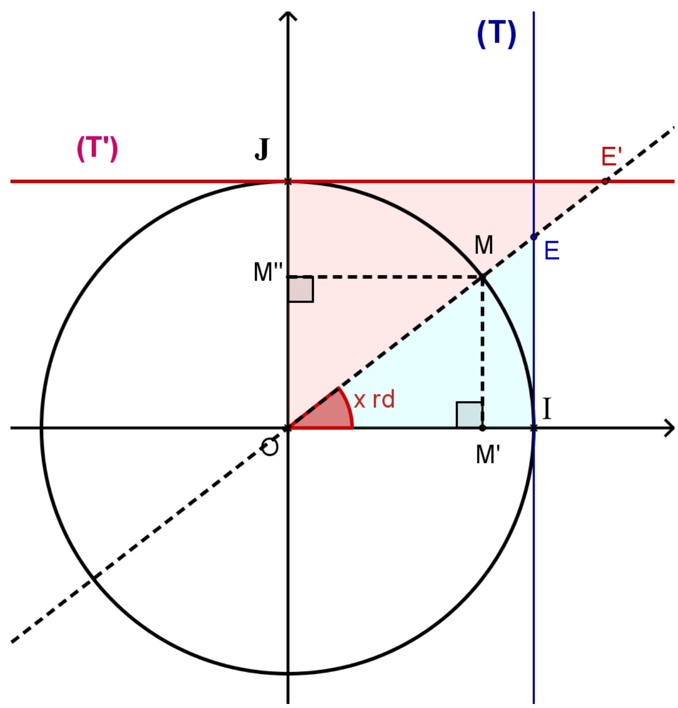
- **Définitions**

A partir des fonctions trigonométriques principales $\cos x$ et $\sin x$, on définit les fonctions **tangente** (notée **tan x**) et **cotangente** notée **cot x**) par :

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

- C.E. pour tan x: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, donc $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- C.E. pour cot x: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, donc $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
- *Interprétation géométrique:*

  Soient (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point I et (T') la tangente à $\mathcal{C}$ au point J, $E \in (T) \cap OM$ et $E' \in (T') \cap OM$:



Montrons que : $\boxed{E(1, \tan x) \quad \text{et} \quad E'(\cot x, 1)}$ dans le cas où $M \in (I)$ (voir figure), les autres cas étant analogues.

Dans $\Delta(OIE)$: $\overline{MM'} = \sin x$, $\overline{OM'} = \cos x$, $\overline{OI} = 1$ et $MM' \parallel EI$. D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{EI}}$ donc $\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{\overline{EI}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EI}}{1} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \overline{EI} = \tan x$.

Dans $\Delta(OJE')$: $\overline{OM''} = \sin x$, $\overline{M''M} = \cos x$, $\overline{OJ} = 1$ et $MM'' \parallel E'J$. D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{\overline{OM''}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{M''M}}{\overline{E'J}}$ donc $\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{\overline{E'J}} \Leftrightarrow \frac{\overline{E'J}}{1} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \overline{E'J} = \cot x$.

Justification <u>géométrique</u> des domaines de tan x et cot x :

Si $x \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$, alors $OM \cap (T) = \varnothing$ donc E n'existe pas et si $x \equiv 0(\pi)$, alors $OM \cap (T') = \varnothing$ donc E' n'existe pas !

- *Remarques*
  - Pour $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$ on a : $\boxed{\cot x = \dfrac{1}{\tan x}}$, ce qui explique pourquoi la touche « cot » ne figure pas sur les calculatrices !
  - tableau des valeurs remarquables :

x (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
cot x		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3) FORMULES

a) Formule fondamentale et ses transformées

- Avec les notations utilisées aux paragraphes précédents, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos x, 0)$, on peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle $\Delta(OM'M)$ rectangle en M' :

$$\overline{OM'}^2 + \overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 \Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1^2 = 1$$

- *Simplification des notations :*

  Au lieu d'écrire $(\sin x)^n, (\cos x)^n, (\tan x)^n$, on peut écrire : $\sin^n x, \cos^n x, \tan^n x$.

- Avec ces notations simplifiées la relation fondamentale s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

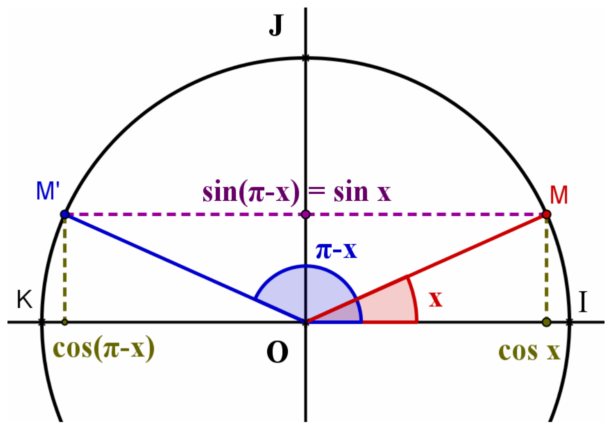
- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ on a :
  - $1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
  - $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$
  - $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1 + \tan^2 x - 1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

D' où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

b) $\sin(\pi - x), \cos(\pi - x), \tan(\pi - x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe OJ donc ils ont la même ordonnée et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \cos(\pi - x) = -\cos x}$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \dfrac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$

- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\cot(\pi - x) = \dfrac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \dfrac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$

- *<u>Application</u> :* ces formules permettent de **passer du 2^e au 1er quadrant**, p.ex. :

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

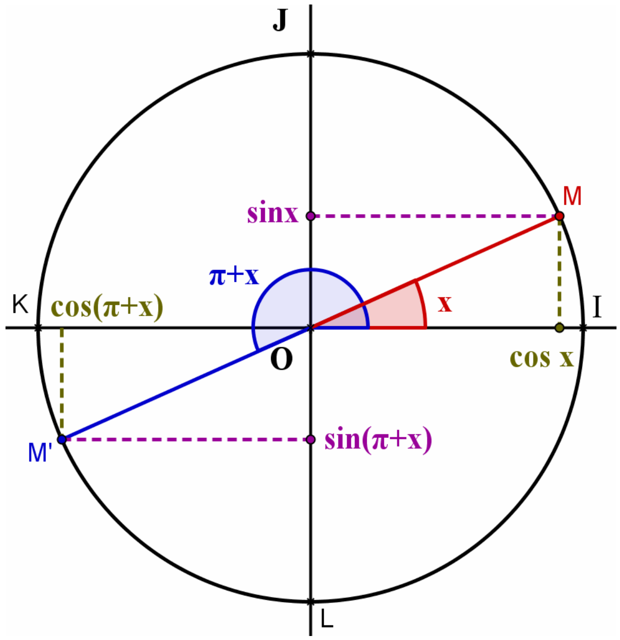
$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $\sin(\pi + x), \cos(\pi + x), \tan(\pi + x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O donc ils ont des ordonnées et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x}$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(\pi + x) = \dfrac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\cot(\pi + x) = \dfrac{\cos(\pi + x)}{\sin(\pi + x)} = \dfrac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$

- Ces deux dernières formules montrent que les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π.

- *Application* : ces formules permettent de **passer du 3e au 1er quadrant**, p.ex. :

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

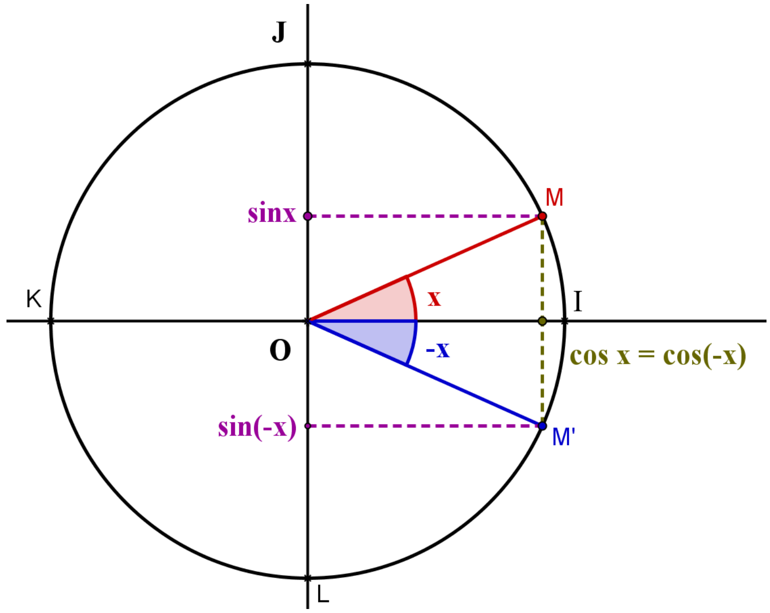
$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) $\sin(-x), \cos(-x), \tan(-x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(-x), \sin(-x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe OI donc ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x}$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\cot(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$

- Ces formules montrent que la fonction **cosinus** est **paire** alors que les fonctions **sinus, tangente et cotangente** sont **impaires**.

- *Application :* ces formules permettent de **passer du 4^e au 1^er quadrant**, p.ex. :

  $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan -\dfrac{\pi}{6} = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 1 p 25

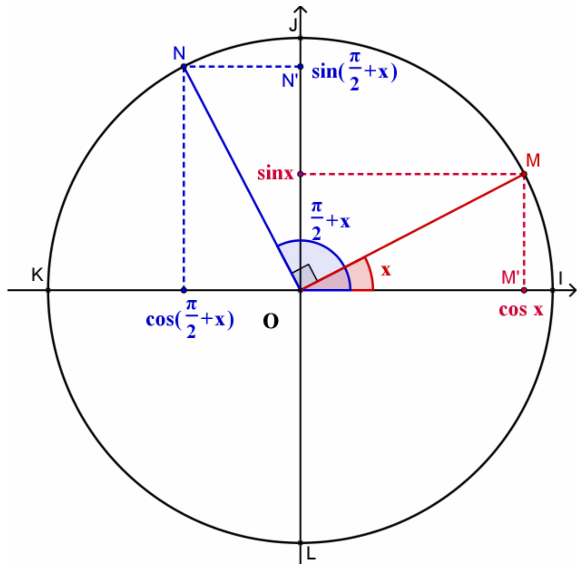
e) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right), \cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right), \tan\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$, $M'(\cos x, 0)$, et les images $N\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\right)$ et $N'\left(0, \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\right)$ de M et M’ par la rotation de centre O et d’angle $90°$. Comme une rotation conserve les distances, on a :

  $$\overline{OM'} = \overline{ON'} \Leftrightarrow |\cos x| = \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\right| \text{ et } \overline{MM'} = \overline{NN'} \Leftrightarrow |\sin x| = \left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\right|.$$

Or on voit que $\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont toujours même signe alors que $\sin x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont toujours des signes contraires, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x}$$



- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\cot x$.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=\cos(-x)=\cos x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=-\sin(-x)=\sin x$.
- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=-\cot(-x)=\cot x$.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right)=-\tan(-x)=\tan x$.
- *Application :* ces formules permettent de transformer sinus en cosinus et réciproquement !

f) Formules d'addition

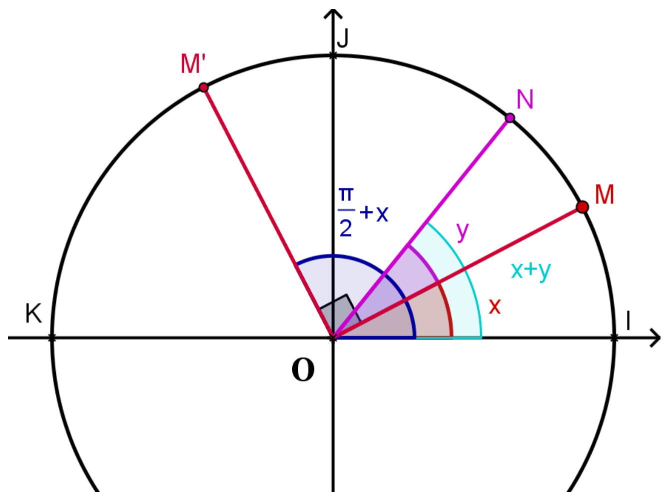
$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y \qquad \tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y \qquad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

démonstration:



- Dans le R.O.N. $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ on a: $M(\cos x,\sin x)$

  $N(\cos(x+y),\sin(x+y))$

  $M'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=M'(-\sin x,\cos x)$

D'où : $\overrightarrow{OM}=\cos x\cdot\overrightarrow{OI}+\sin x\cdot\overrightarrow{OJ}$ (1)

$\overrightarrow{ON}=\cos(x+y)\cdot\overrightarrow{OI}+\sin(x+y)\cdot\overrightarrow{OJ}$ (2)

$\overrightarrow{OM'}=-\sin x\cdot\overrightarrow{OI}+\cos x\cdot\overrightarrow{OJ}$ (3)

Dans le R.O.N. $\left(O,\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$ $N(\cos y,\sin y)$, d'où : $\overrightarrow{ON}=\cos y\cdot\overrightarrow{OM}+\sin y\cdot\overrightarrow{OM'}$ (4).

Remplaçons (1) et (3) dans (4) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=\cos y\cdot\overrightarrow{OM}+\sin y\cdot\overrightarrow{OM'}\\&=\cos y\left(\cos x\cdot\overrightarrow{OI}+\sin x\cdot\overrightarrow{OJ}\right)+\sin y\left(-\sin x\cdot\overrightarrow{OI}+\cos x\cdot\overrightarrow{OJ}\right)\\&=\cos\cdot y\cos x\cdot\overrightarrow{OI}+\cos y\cdot\sin x\cdot\overrightarrow{OJ}-\sin y\cdot\sin x\cdot\overrightarrow{OI}+\sin y\cdot\cos x\cdot\overrightarrow{OJ}\\&=(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)\cdot\overrightarrow{OI}+(\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y)\cdot\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

et en comparant avec (2) il vient :

$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$ et $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$ (5).

- Appliquons les formules (5) à $x-y=x+(-y)$:

$$\begin{aligned}\cos(x-y)&=\cos(x+(-y))\\&=\cos x\cdot\cos(-y)-\sin x\cdot\sin(-y)\\&=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x-y)&=\sin(x+(-y))\\&=\sin x\cdot\cos(-y)+\cos x\cdot\sin(-y)\\&=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\tan(x+y)&=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\\&=\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}\\&=\frac{\cos x\cdot\cos y\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x\cdot\cos y\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}\right)}\\&=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\tan(x-y)&=\tan(x+(-y))\\&=\frac{\tan x+\tan(-y)}{1-\tan x\cdot\tan(-y)}\\&=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}\end{aligned}$$

Remarques :

- Alors que les formules pour ***sin*** et ***cos*** sont valables pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, celles concernant ***tan*** ne sont valables que si tous les dénominateurs sont non nuls !
- Toutes les formules qui vont suivre découlent directement des formules d'addition.

Exercice 2, 3 p 25

g) Formules de duplication

- Expressions de $\sin 2x$ et $\cos 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x\\&\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\end{aligned}}$$

démonstration :

D'après les formules d'addition on a :

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

- On peut exprimer $\cos 2x$ uniquement en fonction de $\sin x$ ou de $\cos x$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{array}}$$

démonstration :

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$ d'après (a) et de même :

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.

- $\boxed{\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \quad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

démonstration :

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{2 \cdot \tan x}{1+\tan^2 x}$ d'après (a),

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{2-1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ d'après (a) et finalement :

$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cdot \tan x}{1+\tan^2 x} : \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{2 \cdot \tan x}{1-\tan^2 x}$.

Exercice 4, 5, 6, 7, 8 p 26

h) $\boxed{\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} & \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ & \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{array}}$

démonstration :

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x+x) \\ &= \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x && \text{d'après } (f) \\ &= 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + (1-2\sin^2 x) \cdot \sin x && \text{d'après } (g) \\ &= 2\sin x \cdot (1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x && \text{d'après } (a) \\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x && \text{d'après (f)}\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x && \text{d'après (g)}\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\cdot(1-\cos^2 x) && \text{d'après (a)}\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Exercice 9 p 26

i) Formules de factorisation

Ce sont des formules permettant de ***transformer des sommes*** *(de fonctions trigonométriques) en* ***produits****.*

$$\sin p + \sin q = 2\cdot\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\cos p - \cos q = -2\cdot\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

démonstration :

- D'après les formules d'addition on a :

  $\sin(x+y)+\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y + \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y = 2\cdot\sin x\cdot\cos y$

  $\sin(x+y)-\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y - \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = 2\cdot\cos x\cdot\sin y$

  et en posant $p = x+y$ et $q = x-y$: $p+q = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{p+q}{2}$ et $p-q = 2y \Leftrightarrow y = \dfrac{p-q}{2}$,

  d'où : $\sin p + \sin q = 2\cdot\sin\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$ et $\sin p - \sin q = 2\cdot\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\sin\dfrac{p-q}{2}$.

- Les formules $\cos p \pm \cos q$ se démontrent de manière analogue.

- $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin p}{\cos p} + \dfrac{\sin q}{\cos q} = \dfrac{\sin p\cdot\cos q + \sin q\cdot\cos p}{\cos p\cdot\cos q} = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$ d'après (f).

- $\tan p - \tan q = \dfrac{\sin p}{\cos p} - \dfrac{\sin q}{\cos q} = \dfrac{\sin p\cdot\cos q - \sin q\cdot\cos p}{\cos p\cdot\cos q} = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$ d'après (f).

Exercice 10 p 27

j) Formules de linéarisation

*Ce sont des formules permettant de **transformer des produits** (de fonctions trigonométriques) en **sommes**.*

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]\\&\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]\\&\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]\end{aligned}}$$

démonstration :

D'après les formules d'addition on a :

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y+\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=2\cdot\sin x\cdot\cos y$$

et en divisant par 2 on obtient la première formule. La démonstration des deux autres formules est laissée en exercice.

<u>Remarque</u> :

En remplaçant y par x dans les deux dernières formules on retrouve les formules vues en (g) :

$$\cos x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos 0\right]\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}\left[\cos 2x+1\right]$$

$$\sin x\cdot\sin x=\frac{1}{2}\left[\cos 0-\cos 2x\right]\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{1}{2}\left[1-\cos 2x\right]$$

Ces deux formules sont donc également des formules de linéarisation !

Exercice 11, 12, 13, 14 p 27 - 29

4) <u>Equations trigonométriques</u>

a) <u>Trois égalités fondamentales</u>

- Nous avons déjà vu en 2a) que :

$$\boxed{\sin x=0\Leftrightarrow x=k\cdot\pi\ \text{ et }\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ (\text{avec } k\in\mathbb{Z})}$$

- Soient $a,b\in\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\sin a=\sin b&\Leftrightarrow\sin a-\sin b=0\\&\Leftrightarrow 2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}=0\\&\Leftrightarrow\sin\frac{a-b}{2}=0\quad\text{ou}\quad\cos\frac{a+b}{2}=0\\&\Leftrightarrow\frac{a-b}{2}=k\pi\quad\text{ou}\quad\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a-b=2k\pi \quad \text{ou} \quad a+b=\pi+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow a=b+2k\pi \quad \text{ou} \quad a=\pi-b+2k\pi$$

$\cos a=\cos b \Leftrightarrow \cos a-\cos b=0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{a-b}{2}=0 \quad \text{ou} \quad \sin\frac{a-b}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}=k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{a+b}{2}=k\pi$$
$$\Leftrightarrow a-b=2k\pi \quad \text{ou} \quad a+b=2k\pi$$
$$\Leftrightarrow a=b+2k\pi \quad \text{ou} \quad a=-b+2k\pi$$

- Soient $a,b\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, alors :

$\tan a=\tan b \Leftrightarrow \tan a-\tan b=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}=0$$
$$\Leftrightarrow \sin(a-b)=0$$
$$\Leftrightarrow a-b=k\pi$$
$$\Leftrightarrow a=b+k\pi$$

- D'où les égalités suivantes où $k\in\mathbb{Z}$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin a=\sin b \Leftrightarrow a=b+k\cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a=\pi-b+k\cdot 2\pi\\ \cos a=\cos b \Leftrightarrow a=b+k\cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a=-b+k\cdot 2\pi\\ \tan a=\tan b \Leftrightarrow a=b+k\cdot\pi\end{array}}$$

- *Remarques*
  - Pour l'égalité de deux ***sin*** ou de deux ***cos*** on a **deux séries de solutions**, alors que pour l'égalité de deux ***tan*** on n'a qu'**une seule série de solutions** !
  - $\sin a=\cos b \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos b \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-a=b+2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2}-a\equiv -b+2k\pi \Leftrightarrow \ldots$

b) Quelques méthodes de résolution d'une équation trigonométrique

1ʳᵉ méthode :

Les équations se trouvant sous l'une des trois formes précédentes se résolvent directement à l'aide de ces formules.

Exemples :

- $\sin 3x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x=x-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x=\pi-x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $\cos 5x = \cos 2x \Leftrightarrow 5x = 2x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = -2x + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad 7x = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{7}$$

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{7} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = 4x + \frac{\pi}{3} + k\pi$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2^e méthode :

En se servant des formules trigonométriques on peut parfois se ramener à l'une des formes précédentes.

Exemples :

- $\cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $2\sin x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

- $\sin 2x+2\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x+2\cos x=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \quad \text{ou} \quad \sin x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

3e méthode :

Parfois on peut se tirer d'affaire par un changement d'inconnue (pour obtenir une équation de degré supérieur à 1.

Exemple :

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

en posant $y=\sin x$ l'équation devient : $2y^2-y-1=0, \Delta=9, y'=1, y''=-\dfrac{1}{2}$, d'où :

$$\sin x=1 \quad \text{ou} \quad \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{ou} \quad \sin x=-\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Remarques

- Pour les équations contenant des fractions (p. ex. tan ou cot), il ne faut pas oublier de commencer par chercher les **conditions d'existence (C.E.)** et de vérifier à la fin que celles-ci sont bien remplies ! Par exemple :

  $\tan 3x=\tan x$, C.E. $3x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3} \text{ et } x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

donc $D_E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \in D_E \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \notin D_E$

par conséquent $S = \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

- Parfois on ne demande pas de résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ mais seulement sur un **intervalle** de $\mathbb{R}$. On ne retient alors que les solutions de cet intervalle (en général en nombre fini !). Par exemple s'il fallait résoudre l'équation précédente sur $[0, 2\pi]$ alors $S = \{0; \pi; 2\pi\}$

Exercice 15 p 29

5) Inéquations trigonométriques

a) Inéquation du type $\sin x < (>, \leq, \geq) a$

- Pour certaines valeurs de a les solutions sont évidentes, p. ex.

  $\sin x \leq 2{,}8 \qquad S = \mathbb{R}$

  $\sin 5x < -4 \qquad S = \varnothing$

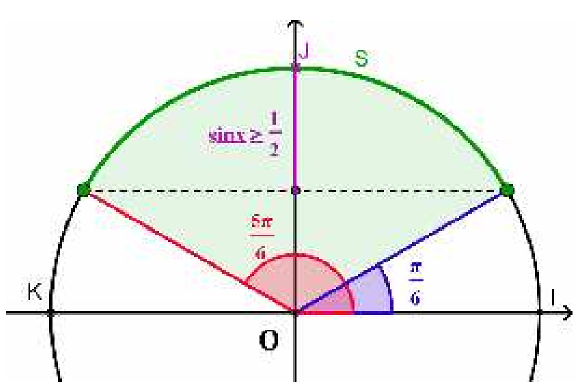
- Si $a = 0$ on sait que (voir p 5) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \\ \sin x \leq 0 \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi \end{array}}$$

- Sinon on résout d'abord l'équation $\sin x = a$ et on voit alors aisément quelles sont les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

- *Exemple1 :* $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

- *Exemple 2 :* $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$

On résout d'abord $\sin y \geq \frac{1}{2}$ (voir exemple 1) puis on revient à l'inconnue x :

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

donc $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}$

b) Inéquation du type $\cos x < (>, \leq, \geq) a$

- Pour certaines valeurs de a les solutions sont évidentes, p. ex.

$\cos x > -9 \qquad S = \mathbb{R}$

$\sin 5x \leq -1 \Leftrightarrow \sin 5x = -1 \Leftrightarrow 5x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad S = \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

- Si $a = 0$ on sait que (voir p 5) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}}$$

- Sinon on résout d'abord l'équation $\cos x = a$ et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

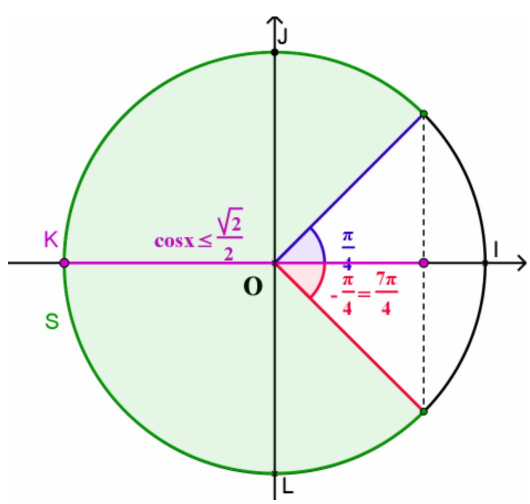
- *Exemple1 :* $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\}$



- *Exemple2 :* $\cos 3x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On résout d'abord $\cos y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (voir exemple 1) puis on revient à l'inconnue x :

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi \leq y \leq \frac{7\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+2k\pi \leq 3x \leq \frac{7\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$$

donc $S=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

c) Inéquation du type $\tan x < (>, \leq, \geq)\, a$

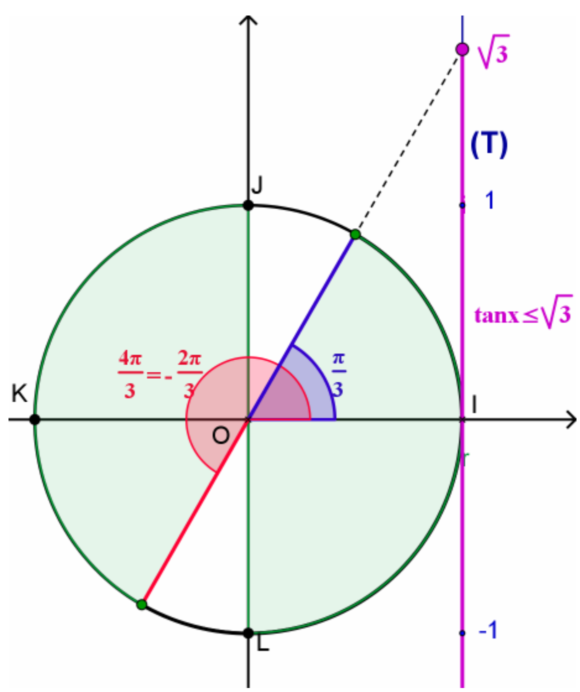
- Si $a=0$ on voit que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \tan x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \text{ et } \cos x \text{ ont même signe} \Leftrightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \tan x \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \text{ et } \cos x \text{ ont des signes opposés} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi < x < \pi+k\pi \end{array}}$$

- On résout d'abord l'équation $\tan x = a$ et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

- *Exemple1 :* $\tan x \leq \sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}+k\pi$



$S=\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq \frac{\pi}{3}+k\pi\right\}$

- *Exemple2 :* $\tan 5x \le \sqrt{3}$, d'après l'exemple 1 :

$$\tan 5x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k\pi < 5x \le \frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5} < x \le \frac{\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}$$

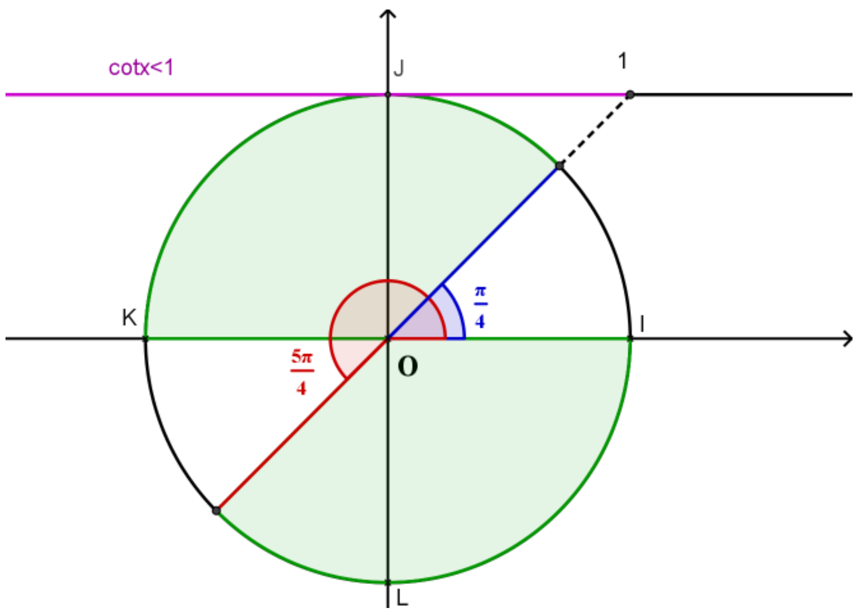
d) Inéquation du type $\cot x < (>, \le, \ge)\, a$

- Si $a = 0$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cot x \ge 0 \Leftrightarrow \tan x \ge 0 \\ \cot x \le 0 \Leftrightarrow \tan x \le 0 \end{array}}$$

- On résout d'abord l'équation $\cot x = a$ et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).
- *Exemple :* $\cot x < 1$

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$$



$$S = \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \pi + k\pi\right\}$$

Exercice 16 p 30

EXERCICES

1) Calculez sans calculatrice :

a) $\tan 120°$

b) $\sin\left(-\frac{89\pi}{3}\right)$

c) $\cos\left(-\frac{53\pi}{6}\right)$

d) $\cot\frac{37\pi}{4}$

e) $\sin 330°$

f) $\sin\frac{53\pi}{4}$

g) $\tan\frac{47\pi}{4}$

h) $\cos(-1680°)$

2) L'angle de mesure $\frac{\pi}{12}$ rd :

a) Exprimez $\frac{\pi}{12}$ rd en degrés.

b) Ecrivez $\frac{\pi}{12}$ rd de deux façons différentes comme différence de deux angles remarquables.

c) Déduisez-en $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ **et** $\tan\frac{\pi}{12}$.

d) **Application :**

Calculez sans calculatrice

$\cos 105°$ $\quad\sin\frac{7\pi}{12}$ $\quad\tan\frac{65\pi}{12}$ $\quad\cot\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ $\quad\cos\frac{-43\pi}{12}$ $\quad\sin 1275°$

3) **a)** Calculez les nombres trigonométriques de $a+b$ et de $a-b$ sachant que :

$a\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, $\sin a=-\frac{1}{2}$, $b\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ et $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Calculez sin x et cos x sachant que :

$\cos(x-y)=\frac{1}{3}$, $\sin(x-y)<0$, $\sin y=-\frac{2}{3}$ et $\cos y>0$.

c) Calculez les nombres trigonométriques de $a+b+c$ sachant que :

$a\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et $\sin a=\frac{2}{5}$; $b\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ et $\cos b=\frac{2}{5}$;. $c\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\cos c=-\frac{2}{3}$

4) L'angle de mesure $\frac{\pi}{8}$ rd :

a) Exprimez $\frac{\pi}{8}$ rd en degrés.

b) Ecrivez $\frac{\pi}{4}$ rd en fonction de $\frac{\pi}{8}$ rd.

c) Déduisez-en une équation du second degré vérifiée par $\cos\frac{\pi}{8}$ puis résolvez-la.

d) Calculez $\sin\frac{\pi}{8}$ puis $\tan\frac{\pi}{8}$.

e) Calculez sans calculatrice

$\sin\frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $\cos\frac{3\pi}{8}$ $\qquad$ $\tan\frac{65\pi}{8}$ $\qquad$ $\cot\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{16}$

5) Calculez sin x et cos x sachant que $\sin 2x = 0,96$ et que $0 < \sin x < \cos x$.

6) Sans calculer x, calculez les nombres trigonométriques de 2x sachant que :

$x \in \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$. A quel quadrant appartient 2x ?

7) Calculez :

a) $\sin 4x$ sachant que $\tan x = 3$ (*indication :* $\sin 4x = \sin 2\cdot 2x$)

b) $\sin^4 x + \cos^4 x$ sachant que $\sin 2x = 0,5$ (*indication :* calculez $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2$)

8) **a)** Exprimez sin 4a et cos 4a en fonction de sin a et cos a.

b) Exprimez $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$ en fonction de sin 2x.

c) Exprimez tan 3a et tan 4a en fonction de tan a.

d) Exprimez $\sin^2\frac{x}{2}$ en fonction de cos x.

9) Ecrivez aussi simplement que possible :

a) $4\sin\frac{x}{3}\sin\frac{\pi+x}{3}\sin\frac{\pi-x}{3}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $\sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

d) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

e) $\frac{1}{2}\left(\tan\left(45°+b\right)-\tan\left(45°-b\right)\right)$

f) $\dfrac{\tan\left(45°+y\right)+\tan\left(45°-y\right)}{\tan\left(45°+y\right)-\tan\left(45°-y\right)}$

10) Factorisez les expressions suivantes :

a) $\cos 2x-\cos x$

b) $\tan a-\tan 4a$

c) $\sin 3b+\sin 5b$

d) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x$

e) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$

f) $\sin 5x-\sin x+\sin 6x$

g) $\sin y-2\sin 3y+\sin 5y$

h) $\sin c-\sin 3c-\sin 5c+\sin 7c$

i) $\sin x+\sin y-\sin\left(x+y\right)$

11) <u>Linéarisez</u> les expressions suivantes :

a) $\cos 3x\cdot\cos 5x$

b) $\cos\left(2x-1\right)\cdot\sin\left(3-x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

d) $\sin x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x$

e) $\cos^4 x$

f) $\sin^4 3x$

g) $\cos^3 x$

h) $\sin^3 2x$

12) Calculez sans calculatrice:

a) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

b) $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}$

c) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{13\pi}{17}}{\cos\frac{3\pi}{17}+\cos\frac{5\pi}{17}}$

13) Démontrez les formules suivantes (sans vous préoccuper des C.E.) :

a) $\cos(a-b)\cos(a+b)=\cos^2 a-\sin^2 b$

b) $\sin^2 a-\sin^2 b=\sin(a-b)\sin(a+b)$

c) $\dfrac{1-\tan\frac{a}{2}\cot a}{1+\tan\frac{a}{2}\cot a}=\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{3a}{2}}$

d) $\dfrac{1-\tan y}{1+\tan y}=\dfrac{\sin(x-y)+\cos(x+y)}{\sin(x+y)+\cos(x-y)}$

e) $\cos^4 a-\sin^4 a=\cos 2a$

f) $\cot x+\tan\frac{x}{2}=\dfrac{1}{\sin x}$

g) $\cos 2x\left(1+\tan x\tan 2x\right)=1$

h) $\tan y+\cot y=\dfrac{2}{\sin 2y}$

i) $\dfrac{\cot x-1}{\cot x+1}=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$

j) $\tan a=\dfrac{\sin 2a+\sin a}{1+\cos a+\cos 2a}$

k) $\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}=\tan^2\frac{a}{2}$

l) $\cot 4x=\dfrac{1}{\tan x+\tan 3x}-\dfrac{1}{\cot x+\cot 3x}$

m) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\tan\frac{x}{2}$

n) $\cos(x+y)\cos(x-y)-\sin(x+y)\sin(x-y)=\cos 2x$

o) $\dfrac{\cos a}{1+\cos a}\cdot\dfrac{\sin 2a}{1+\cos 2a}=\tan\frac{a}{2}$

p) $\sin 3x=4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

14) Ecrivez aussi simplement que possible :

a) $\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

b) $\dfrac{\cos 4x-\cos 2x-\sin x}{\sin 4x+\sin 2x+\cos x}$

c) $\dfrac{\sin 9x}{\sin 3x}+\dfrac{\cos 9x}{\cos 3x}$

d) $\sin 2a\left(\cot a-\cot 2a\right)$

e) $\sin(x-y)\cos(x+y)-\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin 2y$

15) Résolvez les équations suivantes :

1^re série

a) $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ dans $\mathbb{R}$

b) $\tan 2x+\tan x=0$ sur $[0,\pi]$

c) $\tan 2x=\cot x$ dans $\mathbb{R}$

d) $\sin x+2\cos x=0$ dans $\mathbb{R}$

e) $2\cos^2 x=1$ sur $[0,\pi]$

f) $\sin x+\sin 3x=\cos x$ sur $[-\pi,\pi]$

2^e série

a) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ sur $[0,\pi]$

b) $2\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x=0$ sur $[0;\pi]$

c) $\tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

d) $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$

e) $2\tan^3 2x+\tan^2 2x-8\tan 2x-4=0$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

f) $\sin x-\sin 3x=1-\cos 2x$ sur $[0,\pi]$

3^e série

a) $\sin\dfrac{\pi}{x-1}=0$ sur $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

b) $\cos x + \cos 3x + 2\cos 2x = 0$ sur $[0;\pi]$

c) $2(1+\cos 2x) = \sin x$ sur $[0;\pi]$

d) $\cos 2x + \cos x + 1 = \sin 3x + \sin 2x + \sin x$ sur $[-\pi;0]$

e) $9\sin^4 x - 13\sin^2 x + 4 = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

f) $2\sin x \sin 3x = 1$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

16) Résolvez les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$

b) $\tan 4x > \sqrt{3}$ dans $\mathbb{R}$

c) $1 + 2\sin 3x \leq 0$ dans $\mathbb{R}$

d) $2 - \cos 3x \geq 0$ dans $\mathbb{R}$

e) $2\cos 2x + \sqrt{3} > 0$ dans $\mathbb{R}$

f) $\cot x + 1 \leq 0$ dans $\mathbb{R}$

g) $2|\cos x| + 1 \geq 0$ dans $\mathbb{R}$

h) $2|\cos x| - 1 < 0$ dans $\mathbb{R}$

i) $2|\sin x| - \sqrt{3} < 0$ dans $\mathbb{R}$