Lycée de Nkolbisson Année scolaire 2020 / 2021

Département de Mathématiques

ÉVALUATION DE MATHÉMATIQUES			
Classe : Tle C	Séquence : 1	Durée : 2h	Coef : 7

ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 points

Exercice 1 : 6,5 points

1) Démontrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ 1,25pt

b) $A = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ est un nombre rationnel. 1,5pt

2) Considérons les deux suites :

$(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^n} \end{cases}$ et $(v_n): \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{cases}$

a) Démontrer que (u_n) est croissante. 0,5pt

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$ 1pt

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq v_n$ 1,25pt

d) Démontrer que (u_n) est bornée. 1pt

Exercice 2 : 9 points

1) ABCDEFGH est un cube de coté a tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est une base directe de l'espace, O le centre de la face ABCD.

a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{GE}$. 1pt

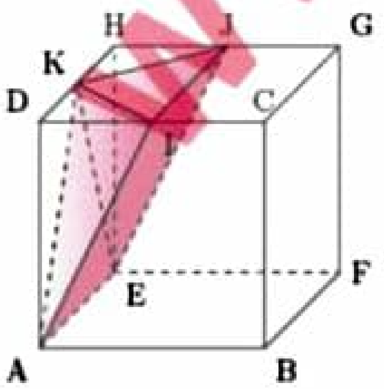
b) Déterminer l'aire du triangle OFD. 1pt

c) Montrer que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. 1pt

d) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$. 0,75pt

e) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = a^2$. 0,75pt

2) Soit ABCDEFGH un cube comme représenté ci-dessous. On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés [DC], [GH] et [DH]. On fixe le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) Montrer que le vecteur $\vec{u}\left(1 ; -\frac{1}{2} ; 0\right)$ est un vecteur normal au plan (AEJ). 1pt

b) En déduire une équation du plan (AEJ). 0,75pt

c) Calculer le volume de la pyramide AEJIK. 1pt

d) Donner une équation paramétrique de la droite (D) passant par K et perpendiculaire au plan (AEJ). 1pt

e) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de K sur (AEJ). 0,75pt

ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 4,5 points

Compétence visée : Se servir des suites numériques pour étudier l'évolution d'une population de coccinelles.

L'évolution d'une population de coccinelles est étudier à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par : $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Tâche 1 : 1,5 point

Étudier, suivant les valeurs de k, le sens de variation de f et montrer que si (u_n) converge alors sa limite est 0 ou bien $1 - \frac{1}{k}$.

Tâche 2 : 1,5 point

Étudier l'évolution de la population de coccinelles sous les hypothèses $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.

On montrera que $u_n \in [0; 1]$, que (u_n) est convergente et on calculera sa limite.

Tâche 3 : 1,5 point

Étudier l'évolution de la population de coccinelles sous les hypothèses $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.

On montrera que $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, que (u_n) est croissante et on calculera sa limite.

M. Ndjeumen